P.1

بخش اول: خلاصه خالص از کل درس آمار و مدل‌سازی

① تعاریف و مفاهیم (۱۲ ردج پ اح)

* مدل سازی: بیان مسائل به زبان ریاضی، مدل مناسب: ابتدایی‌ترین ساده و نتیجه به‌دست‌آمده مورد نظر نزدیک
* اندازه‌گیری: برای مدل‌سازی عددی و تعیین لازمه و اندازه‌گیری اولین گام برای رسیدن به اطلاعات عددی و قابل تفسیر نیست و مقادیر واحد دارد.
* خطای اندازه‌گیری: مقدار واقعی منهای مقدار اندازه‌گیری‌شده. $|E|<1$ و از حالات E^2 به بالا صفر فرض می‌کنیم چون کمن!
* جامعه آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء که ما خواهیم در مورد شون موضوعی رو مطالعه کنیم. به تعداد اعضای کن اندازه جامعه که متناهیه!
* نمونه آماری: بدلیل مشکلات سرشماری در بررسی کل جامعه که خطا پایین اشاره کردیم؛ زیرمجموعه‌ای از جامعه انتخاب می‌کنیم شامل همه خصوصیات
* سرشماری: اگر تمام اعضای جامعه رو مورد مطالعه قرار بدیم و نمونه‌گیری نکنیم کل و دقیق سرشماری کردیم. اندازه جامعه = اندازه نمونه
* مشکلات سرشماری: دور دسترس نبودن تمام اعضای جامعه، وقت‌گیر بودن، مقرون به صرفه نبودن، از بین رفتن جامعه یا قسمتی از آن
* نمونه‌های تصادفی و دلایل آن: امکان‌پذیر بودن انتخاب هر عضو از جامعه، اعضا دارای شانس یکسان جهت انتخاب
* روش‌های جمع‌آوری داده: استفاده از داده‌های قبلی، پرسش یا مصاحبه، مشاهده و ثبت وقایع، انجام آزمایش. قبلاً هم چند بار تو نمودر سوال داشته
* پرسشنامه: سازمان‌دهی محتوا، هدف، محرمیت، سوالات واضح و ساده و کتبی طبق ای، عدم جمع‌آوری اطلاعات شناسایی، دستورالعمل و شکر و وضیح نیازها
* متغیرهای تصادفی: به موضوع یا موضوعات مورد مطالعه مثل قد و وزن و رنگ و سن و ... که به دو دسته کمی و کیفی تقسیم میشه
* متغیرهای کمی: قابل اندازه‌گیری ← پیوسته: وزن، قد، حجم، میزان آلودگی هوا، مقدار گسسته: تعداد دهرچی، طبقات ساختمان حتی اگر تیم طبقه هم داشته باشه، درصد تولید
* متغیرهای کیفی: قابل اندازه‌گیری نیستن ← اسمی: گروه خونی، Rh، رنگ مو، رنگ پوست، نوع آلودگی ترتیبی: فصل‌های سال، مراحل زندگی، مراحل تحصیلی، مراحل رشد.
* اولین‌ها!: اولین گام جهت رسیدن به اطلاعات عددی اندازه‌گیریه، اولین قدم در بررسی جامعه داده‌ای، دسته‌بندیه
* مهم‌ترین بخش آمار: عمل نمونه‌گیری که باید به اندازه کافی بزرگ باشه و اگر جامعه کوچیک باشه سرشماری بهتره.
* الگوهای آماری: زمانیه بین نتایج دو نمونه‌گیری تصادفی مناسب مشترکات. نتایج دو نمونه‌گیری هرگز دقیقاً مساوی نیستن.
* مطالعه متغیرها: در مطالعه متغیرها گاهی جدول فراوانی بدون دسته‌بندی ولی اگر پیوسته باشه این روش عملی نیست. داده‌های جامعه
* روش تعیین اعداد تصادفی: عدد RAN رو که بخش صدم تصادفی می‌کنیم در تعداد اعضای نمونه ضرب می‌کنیم و آخرش برا کسی رو + میکنیم

اولین شماره‌ها

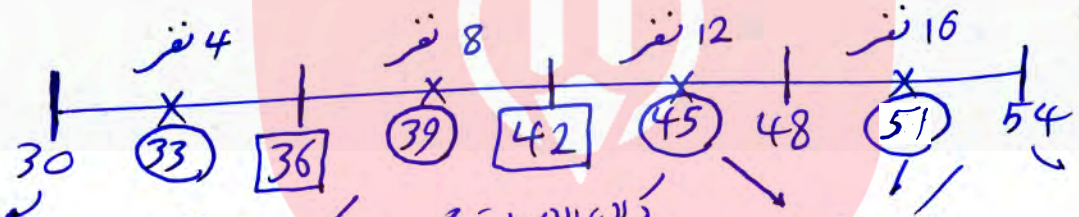
② دسته بندی داده‌ها و انواع فراوانی و نمودارهای آماری

اولاً" برای حل سوالات دسته بندی حتماً" محور نیاز دارد. اصلاً نیازی به حفظ کردن هیچ فرمولی نداری.

شلاً" می‌خوام یک سوال ضرب و جمع از دسته بندی داده‌ها برات حل کنم. یک کلینیک فوق تخصصی و مجهز توسط آقای هالیساف در تهران افتتاح شده!! که برای 40 پزشک متخصص از 30 ساله تا 54 ساله در این کلینیک اشتغال زایی شده. بریم سراغ داده‌های مربوط به سن پزشکان عزیزمون.

ساقه	برگ
3	0 1 2 5 6 7 7 8 8 8 9 9
4	2 2 2 3 3 4 5 5 5 5 6 6 8 8
5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 3 4 4

* اولین قدم برای بررسی و کار آماری دسته بندیه. حالا یه محور می‌کشیم: مثلاً" به 4 دسته تقسیم می‌کنیم.



min

طول دسته = 6

کران بالای دسته اول یا کران پایین دسته دوم

کران بالای دسته دوم یا کران پایین دسته سوم

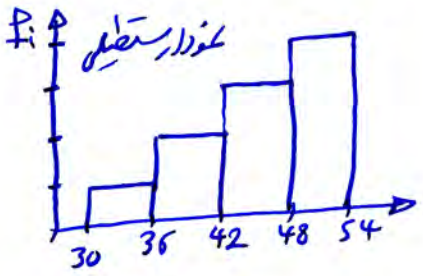
فراتر دسته‌های سوم و چهارم

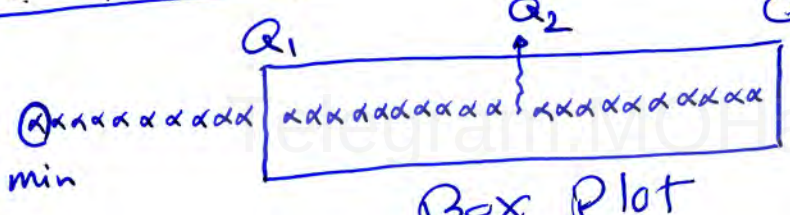
Max

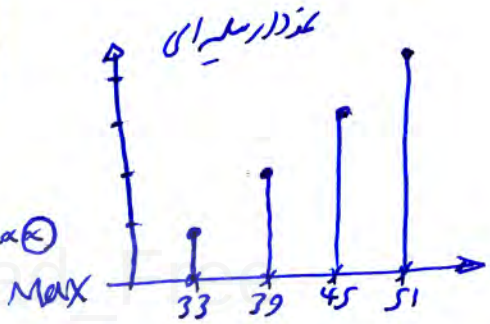
دامنه تغییرات = 24

حالا یه جدول فراوانی کامل براش تنظیم می‌کنیم:

حدود دسته	30-36	36-42	42-48	48-54
مرکز دسته	33	39	45	51
فراوانی مطلق	4	8	12	16
فراوانی نسبی	4/40	8/40	12/40	16/40
درصد	٪10	٪20	٪30	٪40
زاویه	36°	72°	108°	144°
فراوانی تجمعی	4	12	24	40



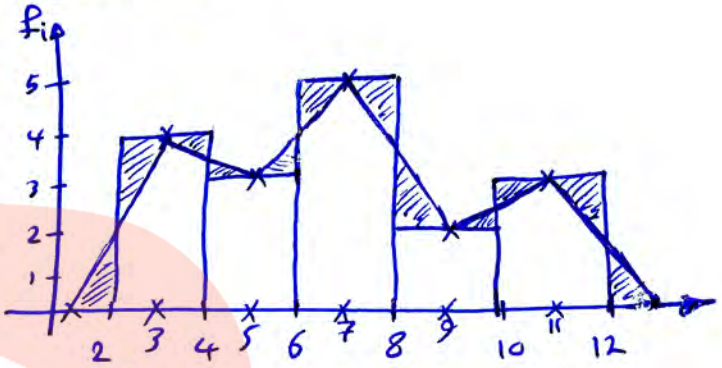


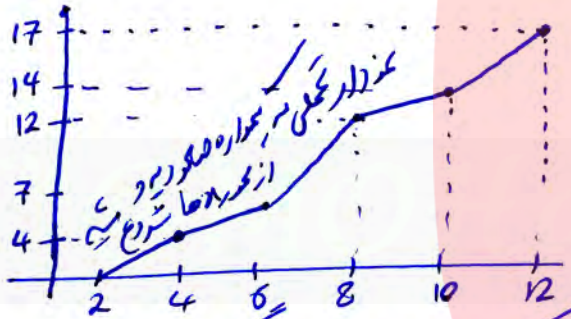


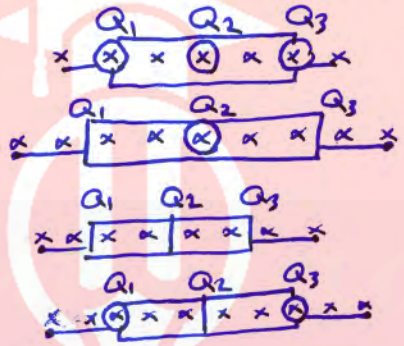
* اگه دوتا میله هارو تو میله ای بریم وصل کنیم چند برابر داده ها میاد ولی کامل نیست

برای کامل شدن از مرکز دسته اول یه اندازه طول دسته بعدی و از مرکز دسته آخری یه اندازه طول دسته جلو میریم و نمودار کامل چند برابر ساخته میشه . با این تبدیل سطح زیر چند برابر مستطیلی با هم برابر میشن . یک مثال میزنم .

حدود	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
مرکز	3	5	7	9	11
فراوانی	4	3	5	2	3
تجمعی	4	7	12	14	17







نمودار جعبه ای
تعداد فرد: 7 تا / 9 تا
تعداد زوج: 8 تا / 10 تا

③ شاخص های مرکزی :

- Mean ← میانگین
- Mode ← داده وسطی
- Median ← میانگین دو داده وسطی ← زوج / میانه ← فرد

1- میانگین حسابی
2- میانگین هندسی
3- میانگین ساقه و برگ

1- روش میانگین حسابی

برای داده هایی که فراوان ندارن بهترین راهه . اول یک عددی که تقریباً وسط و حدس میزنیم و به میانگین نزدیکه انتخاب میکنیم . بعد اختلافات از اون عدد رو با هم جمع میکنیم و آخر تقسیم بر تعداد .

نمرات وزن ندارن یعنی همه یک واحد

مثلاً میخوایم میانگین نمرات این بچه رو حساب کنیم :

12, 15, 16, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20

شما حدس میزنین معدلش چنده ؟ بین 12 تا 20 . بین معدلش بیشتر به سمت 18 باید باشه .

من حدس میزنم 18 ! اول 18 رو مینویسم و بعد دونه دونه از 18 کم میکنم . به اعدادی که بهت میاد کاش اختلاف از میانگین که اگه میانگین حدسی درست باشه جمع اونا حتما صفر میشه !

$$18 + \frac{-6-3-2+0+0+1+1+1+2+2}{10} = 18 - \frac{4}{10} = 17.6$$

(12-18, 15-18, 16-18, 18-18, 19-18, 20-18)

اگه 17 هم حدس میزدم با اضافه 0.6 میشد همین عدد بهت میدن .

2- روش میانگین حدودی

در تمرین صدل فراوانی به ما داده‌ای شده که به حالت وجود داره

تعداد داده‌ها فرد ← دقیقا وسط داده‌ها رو از نظر میگیریم

تعداد زوج ← یکی از دو داده وسط کم‌تر یا میانگین دو داده وسط

میانگین 18

x_i	110	116	122	128	134
f_i	5	8	15	12	10

-12 -6 0 6 12

مرکز دسته وسط 122 پس همه نمای 122

ستون اول را آخر بزرگترین: 10 تا 12، 5 تا 12- شد 60 یعنی 5 تا 12

ستون دوم دیگی به آخر بزرگترین: 12 تا 6، 8 تا 6- شد 24 یعنی 6 تا 4

$$122 + \frac{60+24}{50} = 122 + \frac{84}{50}$$

$$= 122 + \frac{168}{100} = 122 + 1.68 = \boxed{123.68}$$

x_i	12	16	20	24
f_i	1	2	4	3

-6 -2 2 6

مرکز دسته میانگین دو داده‌ی وسطی

که چون زوج بود از همه‌ی داده‌ها 18 واحد کم کردیم.

تو ستون اول را آخر حتما 6- داریم چون

که می‌شود $2 \times 6 = 12$

تو دو تا ستون وسط هم می‌شود $2 \times 2 = 4$

$$\bar{x} = 18 + \frac{12+4}{10}$$

$$\boxed{\bar{x} = 19.6}$$

x_i	12	15	18	21
f_i	%15	%30	%25	%30

-6 -3 0 3

اینا درصد فراوانی هستن و نیازی به تقسیم بر کل نیست.

اگر دقت کنید میانگین 15 و 18 که می‌شه 16.5 و اصلا انتخاب مناسبی نیست که 18 تا از همه کم کنیم ستون دوم و آخر کاملا قرینه می‌شن و با هم می‌رن و وسط می‌شود: $-6 \times \frac{15}{100} = -0.9$

$$\boxed{\bar{x} = 17.1}$$

3- روش میانگین ساقه و برگ

اگر داده‌ها برخلاف اولین نمودار ساقه و برگ که در سوال اعشار داشتن باشن صورت سوال به این موضوع اشاره می‌کرد ولی اگر چیزی نگفت یکان - دهگان. آخرین باری که اعشاری داشتن سال 86 بود. برای محاسبه میانگین تو این حالت هر دسته ساقه‌ها جدا محاسبه شده و بعد همه‌شون با هم جدا:

ساقه	برگ
8	0 0 1 2 2 5 6 7
9	1 1 2 3 3 4 5 5
10	1 1 2 2

مثلا تو نمودار روبرو 8 تا 8، 8 تا 9 و 4 تا 10 داریم که در مجموع شد 64 + 72 + 40 یعنی 176. حالا وقتشه که برگ‌ها رو بشماریم. 5 تا 0.1 داریم که می‌شه 0.5. 5 تا 0.2 داریم که می‌شه 1. دو تا 0.3 و یه 0.4 که روهم می‌شه 1. 3 تا 0.5 که می‌شه 1.5. آخرشم هم یه 0.6 و یه 0.7 که می‌شه 1.3 و جمع همه‌ی اعشارها 5.3 که این عدد رو با 176 جمع کنیم می‌شه 181.3 و حالا تقسیم بر 20.

$$\begin{array}{r|l} 181.3 & 20 \\ 180 & 9.06 \\ 130 & \\ 120 & \end{array}$$

@MOdamad_free
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir
Telegram: MOdamad_free

P.5

④ شاخص‌های پراکندگی

1- دامنه تغییرات (R) ← هیچ‌وقت حضور چندان دلخوشی نداره!
2- واریانس (σ^2) ← همیشه مثبت و توان دوم داره!
3- انحراف معیار (σ) ← همیشه مثبت داره!
4- ضریب تغییرات (CV) ← مثبت نداره!!

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

روش تعیین واریانس:
گام اول: میانگین ← کلاً هر شاخص پراکندگی که بخوای اول باید $\bar{X}$ رو حساب کنی
گام دوم: دونه دونه داده‌ها منهای میانگین $(x_1-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})$
گام سوم: همه بالایی‌ها رو به توان 2!
گام چهارم: تقسیم بر تعداد. اگر فراوانی داشتیم ضرب فراوانی و آخر تقسیم بر کل!

اشکالات واریانس:
1- دو مرحله سوم مجبوریم به توان 2 برسونیم که عدد یا مقدار تغییرات کلی جدا می‌کنیم که شد
2- تقسیم بر میانگین داریم می‌شه ضریب تغییرات!

انحراف معیار (σ)

1, 2, 3, 4, 5

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2} \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

x_i	8	9	10	11	12
f_i	3	2	12	6	1

(-2) (-1) (0) (1) (2)

بریم دونه دونه!

$$\bar{X} = 10 + \frac{-4+4}{24} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{3(8-10)^2+2(9-10)^2+6(11-10)^2+1(12-10)^2}{24} = 1$$

(*) اگر مجموع مربعات یا مجموع مجذورات یا میانگین مساحت‌ها رو داد و واریانس اینجوری محاسبه میشه:

تنها فرمول کل آمار! → $\sigma^2 = \frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد}} - (\bar{X})^2 = \text{میانگین مساحت‌ها} - (\bar{X})^2$

⑤ اثر تغییرات بر شاخص‌ها

هر بلایی سر تک تک داده‌ها بیاد سر شاخص‌های پراکندگی هم میاد غیر همه داده‌ها a برابرشون و با b جمع شدن میانگین و میانه و مد هم همین میشه ولی اگه b جمع بشن σ^2 و σ تغییر نمی‌کنه.
فقط اگه a برابرشون σ^2 ؛ a^2 برابر میشه و σ ؛ $|a|$ برابر. CV هم نباید بررسی بشه.

$$\text{ضریب تغییرات جدید به قدیم} = \frac{CV_{new}}{CV_{old}} = \frac{\frac{\sigma'}{\bar{x}'}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@Mohammad_Free
Telegram.Me/Mohammad_Free

P.1

بخش اول : خلاصه خالص از کل مبحث آنالیز ترکیبی و احتمال (ریاضی پنجم)

① مفاهیم اولیه لازم از آنالیز ترکیبی

* فاکتوریل : تعداد حالات که ما قرار دادن n شی متمایز در n صف، ردیف یا ... می‌شه $n!$.

$0! = 1 \quad , \quad 1! = 1 \quad , \quad 2! = 1\times2 \quad , \quad 3! = 1\times2\times3 \quad , \quad 4! = 1\times2\times3\times4 \quad , \quad \dots$

* ترکیب : r از n $\binom{n}{r}$ یعنی انتخاب r شی متمایز از بین n شی و متمایز نه چون ترتیب در یک انتخاب کردن هم نیست تعداد ترکیب ها همون تعداد زیرمجموعه‌هاست . یعنی وقتی می‌گه $\binom{n}{0}$ یعنی هیچی یا $\binom{n}{1}$ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی از یک مجموعه n عضوی که n میشه و وقتی می‌گه $\binom{n}{n}$ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی یعنی همون ۱ و یا $\binom{n}{n-1}$ تعداد زیرمجموعه‌های $n-1$ عضویه و این هم n میشه.

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$
$$① \quad ⓝ \quad ⓝ \quad ①$$

حالا این وسطی‌ها رو $\binom{n}{2}$ و $\binom{n}{3}$ و ...

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad , \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad , \quad \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \longrightarrow \binom{7}{5} = \binom{7}{2} \quad , \quad \binom{10}{7} = \binom{10}{3} \quad , \quad \dots$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \longrightarrow \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$$

کل ترکیب‌ها برای یک مجموعه n عضوی میشه کل زیرمجموعه‌ها : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

تذکر : وقتی تعداد زیرمجموعه‌ای شامل یک عضو مشخص سفارشی خواسته می‌شه باید اون رو انتخاب شده ببینی و کنار بذاری !

@MOHammad Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
telegram:MOHammad Free

P.2

* اصل ضرب و اصل جمع : این و لدن ⟵ ⊗
این یا لدن ⟵ ⊕

مثال : از بین 5 تجربی و 4 ریاضی می خواهیم 3 نفر را انتخاب کنیم که

$\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}$: 2 تجربی و یک ریاضی

$\binom{5}{2}+\binom{4}{2}$: 2 تجربی یا 2 ریاضی

ما تمرینم تر این مسائل حداقل و حداکثر بریم واردکنیم :

۱- حداقل 2 تجربی : یعنی یا دو تجربی و یا 3 تجربی : هر سه تجربی $\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{5}{3}$

2- حداکثر 1 تجربی : یعنی یا یک تجربی و یا هیچی : هر سه ریاضی $\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$

3- حداقل یک تجربی : چون حالتهاش خیلی زیاد میشه از متمم می ریم یعنی هیچی: $n(A')=\binom{5}{0}*\binom{4}{3}$

4- حداکثر 2 تجربی : چون حالتهاش خیلی زیاد میشه از متمم می ریم یعنی هر سه تا تجربی : $n(A')=\binom{5}{3}=10$

پس بصورتی که در بیرون حالتهای 3 و 4 چون خیلی طولانی میشد از متمم رفتیم و آخرش از کل حالتها کم کردیم.

* انواع جابجایی : گفتیم n شی و متمایز به n! حالت می توان کنار هم قرار بدین . حالا اگه اشیاء یا ارقام یا افراد یا حروفی بخوان کنار هم قرار بگیرن اونجا رو میگن BOX یا یک شی در نظر میگیریم.

* جابجایی یک در میون : تعداد برابر : $m=n \Rightarrow m!\times n!\times 2$

یکی اضافه : $m=n+1 \Rightarrow m!\times n!$

* با ارقام 1، 2، 3، 4، 5 چند عدد 5 رقمی متمایز

5 رقمی ⟵ $5!=120$ همون $5!$

4 رقمی

3 رقمی ⟵ $\binom{5}{3}\times 3!=10\times 6=60$

* با ارقام 1 و 1 و 1 و 2 و 2 چند عدد

$\frac{5!}{2!\,3!}=10$ همون 10

2 دونه 1 با بقیه دونه 2! ، 2 دونه 1 با بقیه دونه 2! ، بقیه 1 با دو دونه

$\frac{122}{\frac{3!}{2!}=3}$ $\frac{112}{\frac{3!}{2!}=3}$ $\frac{111}{\text{بقیه}}$ ⟹ 3!

پس در مجموع میشه 4 تا عدد سه رقمی !

@MOHammad Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:@MOHammad_Free

P.3

② تعریف احتمال و انواع فضای نمونه ای

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعداد حالات مطلوب

فضای نمونه ای: تمامی کل نتایج ممکن در یک پدیده تصادفی

انتخاب‌ها / حالتهای گناریم قرار در گرفتن / مسائل عددسازی در حالات مختلف

- ① پایه‌ای ← تولد، پرتاب سکه و تاس
- ② ترکیبی ←
- ③ جایگشتی ←
- ④ عددی ←

ا — فضاهای پایه‌ای

اولاً بچه می خواد بدنیا بیاد و احتمال پسر بودنش چقدره؟ $\frac{1}{2}$ دختر بودن؟ $\frac{1}{2}$. به این می‌گن احتمال

تعداد جعبه 3 تا رنگ داریم که تا قرمزترین رنگ بودن $\frac{3}{5}$ و قرمز بودن $\frac{2}{5}$.

حالا می خوایم از این جعبه 2 تا مهره به صورت پی در پی با یکی یا متوالی خارج کنیم. احتمال اینکه

هر دو رنگ قرمز: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$ ؛ هر دو سبز: $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$ ؛ اولی رنگ دومی قرمز: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$

اولی قرمز دومی رنگ $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ ؛ یکی قرمز و یکی رنگ: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$.

اگر این اعمال با جایگذاری بود فضای نمونه‌ای با مخرج ها ثابت می‌موند. مثلاً هر دو رنگ می‌شد: $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$!

گفتیم احتمال پسر بودن یا $\frac{1}{2}$ و دختر بودن هم همین. اگر ترتیب بچه‌ها تو خانواده معلوم باشه از همین روش بالا یعنی ضرب کسرهای پی در پی استفاده می‌کنیم ولی اگر معلوم نباشه مجبوریم بریم سراغ فضای نمونه‌ای. مثلاً می‌گه تو یک خانواده‌ی سه فرزندی با کدام احتمال فرزند اول و دوم پسر و سومی دختر؟!

جواب: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ چون ترتیب ذکر شده ولی اگه بگه تو یک خانواده سه فرزندی با کدام احتمال دو فرزند پسر و یکی دختر هستند؟ موضوع فرق می‌کنه. دیگه ترتیب‌ها معلوم نیست پس باید از ترکیب استفاده کنی. دنبال پسرهایی $\binom{3}{2}$ که می‌شه 3 حالت. ضرب معلومه که اول یکی هم دختره دیگه. بین کاری با بقیه‌اش نداریم. چون خانواده سه فرزندیه فضای نمونه‌ای می‌شه $2^3 = 8$. خب بخاطر فرزند پسر یا دختر:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

P.4

نکته خیلی مهم ①: خلاصه تو احتمال اگر در مورد موضوعی صحبتی نکرد یعنی اتفاقی نیافتاده مثلاً اگه توی جعبه 4 تا آبی و 3 تا قرمز داشته باشیم احتمال آبی بودن میشه $\frac{4}{7}$. حالا اگر بدون اینکه دیده باشیم 5 تا مهره از جعبه خارج کنیم باز هم احتمال اینکه ششمی آبی باشه همون $\frac{4}{7}$ میشه.

نکته خیلی مهم ②: الان همینکه گفتم اگر گفت یکی یکی یا پشت سر هم یا متوالی از ضرب کسرها استفاده میکنیم ولی اگه به موقع نکته ۱ برداشت که زوج بود و ترتیب هم ذکر نشده بود میتونیم فرض کنیم که باهم خارج شدن و از ترکیب استفاده کنیم.

مثال ①: در یک آزمایشگاه 6 موش سالم و 4 دیابتی داریم. سه موش بطور متوالی خارج می‌کنیم. با کدام احتمال

الف) هر سه سالم

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$$

ب) دو سالم و یک دیابتی

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}$$

ج) اول و دوم سالم و سومی دیابتی

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$$

مثال ②: در یک خانواده‌ی 4 فرزندی با کدام احتمال؟

الف) هر ۳ فرزند اول پسر

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

ب) فقط ۳ فرزند اول پسر

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

ج) سه فرزند پسر

$$\frac{\binom{4}{3}}{2^4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

مثال ③: در پرتاب ۳ سکه با کدام احتمال

الف) دو رو

$$\frac{\binom{3}{2}}{2^3}=\frac{3}{8}$$

ب) حداقل دو رو

$$\frac{\binom{3}{2}+\binom{3}{3}}{2^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

ج) حداقل یک رو

متمم حداقل یک میشه هیچی $\Rightarrow P(A')=\frac{\binom{3}{0}}{2^3}=\frac{1}{8}\Rightarrow P(A)=\frac{7}{8}$

مثال ④: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا چهارمین رو ظاهر شود. با کدام احتمال در ۷ پرتاب برای اولین بار چهارمین رو ظاهر میشود؟

یعنی در ۶ پرتاب اول ۳ بار رو بیاد و در پرتاب هفتم سه چهارمین رو

$$\frac{\binom{6}{3}}{2^6}\times\left(\frac{1}{2}\right)$$

← پرتاب هفتم یعنی چهارمین رو

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.mydars.ir
Telegram: @Mohammad_Free

P.5

2- فضاهای ترکیبی

هروقت بحث انتخاب کردن بین اندیس شیء مطرح بود و ترتیب ها هم ذکر نشده بود تو فرض کنید احتمال ما برای سرفع ترکیب .

مثال ① : در ظرفی 5 مهره با شماره های 1 تا 5 داریم . دو مهره با هم بیرون می آوریم با کدام احتمال ؟

{1, 2, 3, 4, 5}

الف) مجموع زوج

$$\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

ب) مجموع فرد

$$\frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$$

ج) مجموع کمتر از 5

دیگه مجبوریم حالتی رو بشمریم : $\frac{2}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$

تذکر : مجموع سه عدد
- اگر هر سه زوج یا دو تا فرد و یک زوج ← جمع زوج
- اگر هر سه فرد یا یک فرد و دو زوج ← جمع فرد

3- فضاهای جایگشتی

در مسائل طبقه سازی و عددسازی این حالت پیش میاد و بحث کنار هم قرار گرفتن ها بسیار مهمه . اگر تو کنکور از این قسمت سوال بیارن "جایگشت" با گذاشتن روهم داره .

تذکر : اگر 4 پسر و 3 دختر داشته باشیم به چند طریق می‌تونن بیان سر صف :

- هیچ دو پسری کنار هم نباشن : هیچ دو دختری کنار هم نباشن : ObObObObO

پسرا جایگشت دخترا

$$\binom{5}{3} \times 3! \times 4!$$

$4! \times 3!$

4- فضاهای عددی

در مسائل عددسازی بحث صفر خیلی مهمه که اگر عضو مجموعه بود لازمه حالتی که شامل صفر میشه رو جدا کنیم . مثلاً در زوج بودن و بخش پذیری بر 5 چنین حالتی پیش میاد . البته گاهی به جای زوج بودن از متمم استفاده میکنیم و فرد بودن رو حساب میکنیم .

@MOHammad_Ebr
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: MOHammad_Ebr

③ اعمال بر پیامدها و پیامدهای مستقل

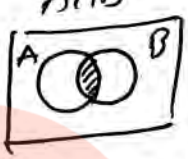
اول از همه با یه بحثی در پیامد مستقل تعریفش اینه که رابطه‌ی هم نداشته باشن یعنی وقوع یکی تأثیری بر وقوع اون یکی نداشته باشه. در این حالت

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

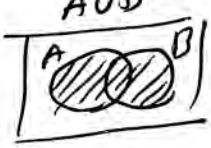
A و B مستقل

$P(A-B)$

$A\cap B$



$A\cup B$



$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$$
$$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B))$$
$$= P(A)\cdot P(B') = P(A\cap B')$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

A, B ناسازگار $\leftarrow P(A\cap B) = 0$ $\leftarrow$

$$(A-B)\cup(B-A)$$
$$\text{or}$$
$$P(A\cup B) - P(A\cap B)$$

نکته مهم: نحوه تشخیص استقلال پیامدها $\leftarrow$ یا با توجه به بی‌ربط بودن پیامدها از صورت مسأله

یا با محاسبه $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

تعدادها، پرتاب‌ها، برداشت‌های متوالی و بی‌ربط‌ها همه مستقل اند و نگاهی دوباره خیلی از صورت مسأله این موضوع را تشخیص داد. مثل مثال زیر:

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. سه پیامد A و B و C را تعریف می‌کنیم:

A = عدد تاس اول 4 $\{(4,1),\dots,(4,6)\}$

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

B = عدد تاس اول 5 $\{(5,1),\dots,(5,6)\}$

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

C = مجموع دو تاس 7 $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A\cap B = \phi \Rightarrow$ A, B ناسازگار

$A\cap C = \{(4,3)\} \rightarrow P(A\cap C) = \frac{1}{36} = P(A)\times P(C) \Rightarrow$ A, C مستقل

$B\cap C = \{(5,2)\} \rightarrow P(B\cap C) = \frac{1}{36} = P(B)\times P(C) \Rightarrow$ B, C مستقل

حالا اگه پیامد D رو تعریف کنیم مجموع دو تاس 11 داریم: $\{(5,6),(6,5)\} \rightarrow P(D) = \frac{2}{36}$

$P(A\cap D) = 0$ ، $P(B\cap D) = \frac{1}{36} \neq P(B)\times P(D) \rightarrow B\cap D = \{(5,6)\}$

@MOHamadi_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: @MOHamadi_Free

روش استقلالی ❤

شرایط استفاده: 1) پیشامدها مستقل باشن
2) جاشون معلوم باشه

* فرشید اسماعیلی دوست عزیزم و بهترین بازیکن تیم فوتبال استقلال از هر 5 شوتی که در فاصله 30 متری دروازه پرسپولیس به سمت دروازه شلیک می‌کنه 4 تاش گل می‌شه ☺
پس احتمال پیروزی داداش فرشید $\frac{4}{5}$ یا $\frac{8}{10}$ یا 80 درصده. حالا مرتبه 3 تا شوت بزنه

الف) هر سه تا گل بشه: $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}$

ب) دو تای اول گل بشه: $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}$

ج) فقط دو تای اول گل بشه: $\frac{8}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}$

د) دو تاش گل بشه: $\binom{3}{2}\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{2}{10}\right)^1$

و حالا یک سوال مهم: داداش علی آقای منصوریان میزنید سه تا ضربه فرصت‌سازی داره تا یه گل بزنه

$$P(A)=\underset{\text{اول گل}}{\frac{8}{10}}+\underset{\otimes\ \checkmark}{\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}}+\underset{\otimes\ \otimes\ \checkmark}{\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{8}{10}}$$

* بهتر بود به جای این کارا از متمم می‌رفتیم دنبال گل نشدن هیچکدوم از تیرها رو حساب و از یک کم می‌کردیم:

$$P(\acute{A})=\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{8}{1000}\Rightarrow P(A)=0.992$$

مثال: آقایان رحمانی، جهانگیری، هاشمی طبا، میرسلیم، رئیسی و قایدی‌فر کاندیداهای دوازدهمین دوره انتخابات ریاست جمهوری در کشور عزیزمون هستن. با کدام احتمال ...

الف) همه تیری: $\left(\frac{1}{12}\right)^6$ ↓ استقلالی $\underbrace{\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\cdots\times\frac{1}{12}}_{6}$

ب) همه در یک ماه: $12\left(\frac{1}{12}\right)^6=\left(\frac{1}{12}\right)^5$ ، $\underbrace{\left(\frac{1}{12}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{12}\right)^6}_{12}$

ج) هیچ دو تیری در یک ماه متولد نشده باشند.

$$\frac{12}{12}\times\frac{11}{12}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{12}\times\frac{8}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{P(12,6)}{12^6}=\frac{P(11,5)}{12^5}$$

+ هروقت از آخر برسه اول ضرب می‌کنیم و برمیگردیم عقب رسم:

$6\times5\times4=P(6,3)$ ، $10\times9\times8\times7=P(10,4)$

@MOHammad_Free
Telegram.MOHammad_Free
مای درس
www.my-dars.ir

④ مسائل تاس و احتمال شرطی و متغیر تصادفی

پرتاب دو تاس از جعبه همیشه $6^2=36$. فضای نمونه‌ایش

حاصلضرب :

① شرط بر فضای نمونه‌ای

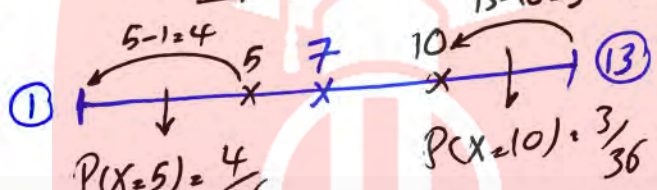
$\{(1,1),(1,2),\dots,(1,6)\}$
$\{(2,1),\dots,(2,6)\}$
$\{(3,1),\dots,(3,6)\}$
$\{(4,1),\dots,(4,6)\}$
$\{(5,1),\dots,(5,6)\}$
$\{(6,1),\dots,(6,6)\}$

② شرط بر جدول مجموع

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

③ شرط حدودی بر جدول

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36



اگر X رو تعریف کنیم مجموع دو تاس داریم :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

به این کار جدول توزیع احتمال که جمع احتمالات همیشه یک میشه !

مثال : با کدام (کدام) حاصلضرب دو تاس ← مضرب 5 : ردیف 5 و ستون 5 مزه‌ی یک دونه مشترک .

مضرب 3 : ردیف 3 و 6 و ستون 3 و 6 : $24-4=20$

احتمال شرطی

پیش درس قبلیه ! با این تفاوت که فضای نمونه‌ای تغییر میکنه . به عنوان مثال توی پرتاب دو تاس احتمال داره سوال شرطی مطرح بشه به این شکل :

مثال ① : دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم . اگر مجموع 7 باشد با کدام احتمال یکی از تاس‌ها 5 است ؟

وقتی صورت سوال می‌گه مجموع 7 یعنی داریم : $S_{new}=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

پس جواب میشه $\frac{2}{6}$ یا $\frac{1}{3}$.

مثال ② : در یک خانواده 4 فرزندی فرزند اول پسر است . با کدام احتمال این خانواده دارای 3 دختر است ؟ وقتی میگه فرزند اول پسر یعنی یکیش حتما پسر و حالا این یکیه فقط یه خانواده 3 فرزندی داریم که احتمال دختر بودن هر سه تا میشه $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

P.9

مثال ③ : در یک خانواده 4 فرزندی یکی از فرزندان پسر است . با کدام احتمال این خانواده دارای 3 دختر است ؟ اینجا دیگه هیچی تموم نشده . فقط فضای نمونه‌ای 4 فرزندی از 16 حالت به 15 حالت تقلیل پیدا می‌کنه چون حالت هر 4 فرزند دختر حذف می‌شه .

$$S_{new} = \{(bbbb), (bbbg), (bbgg), (bggg)\} \quad \binom{4}{3} = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{15}$$

تذکر : البته احتمال شرطی ارتباطی داره که اگر صورت سوال رو اینجا بین پیشامدها دارد داده بود باید ازش استفاده می‌کنیم و در غیر این صورت نیازی به این کار نیست

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: احتمال A به شرط B ↳ می‌خوایم

A, B مستقل $\Rightarrow P(A/B) = P(A)$

A, B ناسازگار $\Rightarrow P(A/B) = 0$

⑤ احتمال کل

یعنی احتمال تو دل به احتمال دیگه . بچه‌ای حواد دنیا میاد . بسته‌ای که یا پسره یا دختر . هر کدوم شیشه $\frac{1}{2}$. حالا اگه آقا پسره باشه احتمال بیمار بودنش ٪30 و اگه دختر باشه ٪10 . با کدوم احتمال این بچه سالمه ؟! شما کی یا پسر سالم و یا دختر سالم

یا پسر سالم $\frac{1}{2} \times \frac{70}{100}$

یا دختر سالم $\frac{1}{2} \times \frac{90}{100}$ $= \%80$

مثال مهم : دو جعبه داریم

A	B
7 آبی	3 آبی
3 قرمز	2 قرمز

مدل اول : از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم . با کدام احتمال A : آبی و B : قرمز ؟

$$\frac{7}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{28}{100}$$

مدل دوم : از هر جعبه مهره‌ای خارج می‌کنیم . با کدام احتمال یکی آبی و یکی قرمز ؟

$$\frac{7}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{46}{100}$$

مدل سوم : از هر جعبه 2 مهره خارج می‌کنیم . با کدام احتمال دو تای اول از A آبی و دو تای دوم از B دوباره آبی ؟!

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@MOHammad_Free
Telegram:MOHammad_Free

P.10

حل چهارم: یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب و مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال آبی؟

$$A\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\times\tfrac{7}{10}=\tfrac{7}{20} \xrightarrow{+} \tfrac{13}{20}=0.65$$
$$B\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{5}=\tfrac{3}{10}=\tfrac{6}{20}$$

حل پنجم: یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و دو مهره انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو آبی؟

* تذکر: دیروز سه تا جعبه بود هر کدوم یک سوم می‌رفت جمع می‌کنیم و در احتمال خودش ضرب می‌شد!

$$A\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\times\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=$$
$$B\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=$$
$\longrightarrow$ جمع می‌کنیم

حل ششم: یک مهره از A خارج و به B می‌اندازیم. حال از B مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال آبی؟

مهره خروجی از A:
- با آبی: $7/10 \longrightarrow$ Bnew (2 آبی، 4 قرمز) $\times 4/6 = 28/60$
- با قرمز: $3/10 \longrightarrow$ Bnew (3 آبی، 3 قرمز) $\times 3/6 = 9/60$

$\xrightarrow{+} \frac{37}{60}$

حل هفتم: دو مهره از A و یک مهره از B به داخل ظرف C انداخته و سپس مهره‌ای از C خارج می‌کنیم. احتمال آبی بودن؟

روش اول:

مهره در ظرف C:
- از A: $2/3 \times 7/10 = 14/30$
- از B: $1/3 \times 3/5 = 6/30$

$\xrightarrow{+} \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

از همون اول هم می‌تونستیم دو ظرف رو یکی کنیم که می‌شد 10 تا آبی و 5 تا قرمز یعنی 15 تا مهره که چون 10 تاش آبیه احتمال آبی بودن $\frac{10}{15}$ یا همون $\frac{2}{3}$ می‌شد!

6) توزیع دو جمله‌ای

می‌خوام در مورد حالت «دو» توضیحاتی بدهم صحبت کنم. جایی پرسیدم با کدوم احتمال دو تاش گل می‌شه؟! سوال مطرح شده تو ذهن تو اینه که کدوم 2 تا؟! جوابش:

2 تا از 3 تا یعنی $\binom{3}{2}$؛ گل شدن دو بار P^2 و گل شدن یک بار q^1 (P=پیروزی، q=شکست)

P.11

مثال ① : ٪40 عوامل تعیین کننده R_H خون مثبت است . با کدام احتمال در یک خانواده 3 فرزندی

$P_{R_H^-}$ = احتمال منفی × احتمال منفی = ٪40 × ٪40 = ٪16 ⇒ $P_{R_H^+}$ = ٪84

الف) 2 فرزند اول منفی

$\frac{16}{100} \times \frac{16}{100}$

ب) فقط دو فرزند اول منفی

$\frac{16}{100} \times \frac{16}{100} \times \frac{84}{100}$

ج) دو فرزند منفی ← کدام دو تا

$\binom{3}{2}\left(\frac{16}{100}\right)^2\left(\frac{84}{100}\right)^1$

انواع نرم‌های بیان پیروزی

① مثل آدمیزاد

بازی با احتمال 80٪ جوانمردانه
عمل با احتمال 90٪ موفقیت آمیز است
احتمال دیر رسیدن حسن برابر 0.2 است

② زبون آماری

در یک دانشگاه 50٪ فرهنگیان به تحصیل
100 نفر دانشجوی پزشکی

③ زبون نسبی

احتمال غالب بودن
سه برابر مغلوب بودن
مغلوب = 1/4 ، غالب = 3/4

④ با احتمال کل

اگر تاس زوج آمد 3 سکه اگر فرد آمد 2 سکه
اگر تیر خورد 5 هره اگر نخورد 3 هره

مثال ② : از جعبه‌ای شامل 7 مهره آبی و 2 مهره قرمز بطور تصادفی 5 مهره خارج می‌کنیم .

با کدام احتمال — الف) 3 تایش آبی ؟!

ب) فقط 3 تایش آبی ؟!

اولاً "این دو تا فرقی نداره . ثانیاً" چون گفته تصادفی یعنی بدون جایگذاری پس هر مهره برداشت فضای نمونه‌ای تغییر می‌کنه و توزیع در جعبه‌ای است . ولی چون ترتیب ذکر شده مهم نیست فرض می‌کنیم که با هم خارج می‌شن و ترکیب بزنیم →

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{2}{2}}{\binom{9}{5}}$$

ج) اگر این آزمایش را n بار جایگذاری انجام دهیم با کدام احتمال 3 مهره آبی خارج می‌شود؟

تو این حالت چون آزمایش با جایگذاری به هر دفعه مهره خارج شده به جعبه برمی‌گرده شرایط آزمایش در هر برداشت یکسانه و لازم نیست از پیروزی و شکست استفاده کنیم .

تو این مثال پیروزی یعنی آبی بودن $\frac{7}{9}$ و شکست غیر قرمز بودن $\frac{2}{9}$!

تعداد آزمایشات 5 بار (چون 5 مهره خارج کرده) و انتظار 3 آبی داریم یعنی 3 بار پیروزی

$$\binom{5}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^3\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \binom{5}{3}(\text{پیروزی})^3(\text{شکست})^2$$

www.riyazi.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.1

بخش اول: خلاصه خالص کل فصل تابع (رم دوج پراح)

① انواع معادلات و نامعادلات و یادآوری اتحادهای صیری

$f(x)=ax+b$: تابع (عرض از مبدأ، شیب)

$ax+b=0$: معادله

ساده‌ترین معادله که معادله‌ی درجه اوله که البته با تابع درجه اول فرق می‌کنه

شیب یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$. به معنای ساده‌تر به ازای هر یک واحدی که جلو می‌ریم اگر a واحد بالا بریم شیب می‌شه a و اگر a واحد پایین بیایم شیب می‌شه $-a$. مثلاً شیب 2 یعنی به ازای هر یک واحد که جلو بریم خط 2 واحد بالا می‌ره و اگر -2 باشه یعنی به ازای هر یک واحدی که جلو بریم خط 2 واحد پایین می‌یاد . حالا چند تا خط با هم ببینیم :

$y=x+2$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$y=-x+3$

$-x+3=0 \Rightarrow x=3$

$y=2x-1$

$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$y=-3x+2$

$-3x+2=0$

$x=\frac{2}{3}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

انواع معادله‌ی درجه دوم و روش‌های حل آن‌ها

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

کامل (روش‌های حل)

روش اول: دیدن رابطه بین ضرایب

1) if $a+b+c=0$

$x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$

$x^2-5x+4=0$

$x=1$, $x=4$

2) if $a+c=b$

$x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

$x^2+5x+4=0$

$x=-1$, $x=-4$

روش دوم: تجزیه

اگر رابطه‌ای بین ضرایب نبود

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x^2+9x+20=0$

$(x+5)(x+4)=0$

$x=-5$

$x=-4$

روش آخر: Δ

اگر از رابطه بین ضرایب رونده و از تجزیه مونده شدی.

$\Delta=b^2-4ac$

$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$2x^2-3x-2=0$

$x_1x_2=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}$

$x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$

ناقص

$b=0$

$ax^2+c=0$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$

ریشه نداره

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=\pm 2$

دو تا ریشه‌ی قرینه داره

$c=0$

$ax^2+bx=0$

خب x داره می‌گه چون مادرت از من فاکتور بگیر

پس این معادله همیشه دو تا ریشه داره که یکیش صفره

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$

$x^2+\sqrt{3}x=0$

$x(x+\sqrt{3})=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

Telegram: MOHammad_Free

P.2

یادآوری اتحادهای لازم برای کنکور

① $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

② $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

⑤ $(a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

معادلات گویا

۱- بهتره اگر دوتا کسر داریم طرفین وسطین کنیم.

2- اگر کسر بود با تناسب تبدیلش کن به کسر بشه. بهتره طوری باشه که مخرج‌ها برن.

3- اگر تو کنکور سوال بیاد صفا "ریشه مخرج" میگن جواباتو که باید حذف بشه.

4- شرط برن برن هم داریم ← ① صورت و مخرج برن برن
② مخرج و مخرج برن برن
③ صورت و صورت برن برن بذار کنار

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6} = \frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-12} \xrightarrow{\text{فاکتور}} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}$$

① صورت و مخرج برن برن : $(x+2)$ها باهم میرن ؛ $\frac{(x-1)}{x-3} = \frac{(x-1)(2x-3)}{(x-3)(x+4)}$

② مخرج و مخرج برن برن : $(x-3)$ها باهم میرن : $\frac{x-1}{1} = \frac{(x-1)(2x-3)}{x+4}$

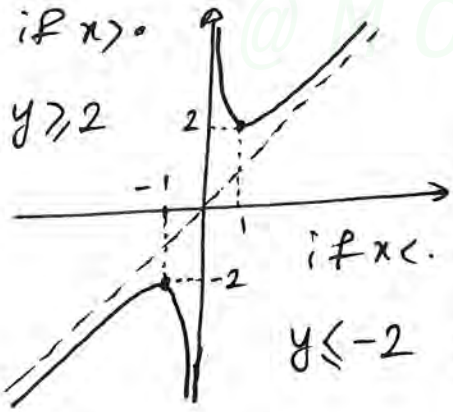
③ صورت و صورت برن برن بذار کنار : $(x-1)$ها باهم میرن ولی $x=1$ رو به عنوان ریشه معادله نگه میداریم :

$\frac{1}{1} = \frac{2x-3}{x+4} \Rightarrow 2x-3 = x+4 \Rightarrow x = 7$

P.3

* معرفی تابع معکوس $x+\frac{1}{x}$

✓ تغییر متغیر $t+\frac{1}{t}$ یکی از چیزهایی که تو کنکور میاد.



$x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=1$ مضاعف

$x+\frac{1}{x}=-2 \Rightarrow x=-1$ مضاعف

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{2x^2+1}{2x+1}+\frac{2x+1}{2x^2+1}=-2 \Rightarrow t+\frac{1}{t}=-2 \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+1}{2x+1}=-1 \Rightarrow 2x^2+1=-2x-1 \Rightarrow 2x^2+2x+2=0$$

$$\Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow$$ a,c هم علامت و طبق توضیحات بالا جواب ندارد.

* توجه: اگر a,c مختلف العلامت بود $\Delta=b^2-4ac$ حتماً مثبت و معادله دارای دو ریشه حقیقی مختلف العلامت!

* نحوه برخورد با معادلات درجه 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0$

① با جمع ضرایب صفر ← یکی از ریشه‌ها 1 ← یکی از عامل‌ها $x-1$ ← عامل دیگر با تقسیم یا تجزیه حرفی

② با $a+c=b+d$ ← یکی از ریشه‌ها -1 ← یکی از عامل‌ها $x+1$ ← بقیه مثل بالا.

$x^3-5x^2+7x-3=(x-1)(x^2-4x+3)=(x-1)^2(x-3)=0$ ← $x=1$ مضاعف، $x=3$ ساده

$x^3+6x^2+10x+5=(x+1)(x^2+5x+5)=0$

③ حالت خاص که با دسته بندی و فاکتورگیری حل میشه:

$x^3-4x^2-x+4=x^2(x-4)-(x-4)=(x-4)(x^2-1)=0$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=\pm 1, x=4$

@MOHammad_Free
ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: MOHammad_Free

P.4

* اصول نامساوی ها و حل انواع نامعادله

۱) طرفین نامعادله رو میتونیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم: $a>b \Rightarrow a\pm c>b\pm c$

2) اگر طرفین رو در یک عدد + ضرب یا تقسیم بشه جهت عوض نمیشه: $a>b \Rightarrow ac>bc$

3) توان فرد و ریشه فرد هیچ مشکلی نداره: $a>b \Rightarrow a^{\text{فرد}}>b^{\text{فرد}}$ ، $\sqrt[\text{فرد}]{a}>\sqrt[\text{فرد}]{b}$

4) میتونیم طرفین رو به توان 2 برسونیم ولی اگر منفی باشن جهت عوض میشه:

$5>2 \Rightarrow 25>4$
$-2>-3 \Rightarrow 4<9$

5) میتونیم معکوس کنیم ولی اگر هم علامت باشن جهت عوض میشه:

$2<5 \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{5}$
$-10<-2 \Rightarrow -\frac{1}{10}>-\frac{1}{2}$
$-2<5 \Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{1}{5}$

* 4 بالاتر از 9 $\Leftarrow$ $4>9$
4 بالاتر از 9 نیست $\Leftarrow$ $4\leq 9$

جمع بندی: چی باعث میشه جهت نامساوی عوض بشه؟

۱- طرفین رو به عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم!

2- طرفین منفی باشن و به توان زوج برسه!

3- طرفین هم علامت باشن و معکوس کنیم!

در نامعادله قدر مطلقی هم

$|u|\leq a \Rightarrow -a\leq u\leq a$

$|u|\geq a \Rightarrow u\geq a$ or $u\leq -a$

* مهم ترین نامعادله ای که در کنکور نامعادله های درجه دوم که جلسه بعد باید انواع فرم هاش رو حل مسلط باشی

① $a>0$, $\Delta>0$ ② $a>0$, $\Delta=0$ ③ $a>0$, $\Delta<0$ ④ $a<0$, $\Delta>0$ ⑤ $a<0$, $\Delta=0$ ⑥ $a<0$, $\Delta<0$

① بین دو ریشه ⊖ ② همواره نامنفی ③ همواره ⊕ ④ بین دو ریشه ⊕ ⑤ همواره نامثبت ⑥ همواره منفی

* $x^2-5x+4<0$ ← جمع ضرب صفر: $x=1$ یا $x=4$
حل: ۱) علامت: $a>0$, $\Delta>0$ → بین دو ریشه ⊖
۲) جواب: $1<x<4$

* $x^2-5x+4>0 \Rightarrow x<1$ or $x>4$

* $x^2+4x+5<0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ همواره ⊕ $\Rightarrow \emptyset$

* $x^2+4x+5>0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

@MOHammad_Free
مای درس
مرکز فروش و مشاوره آموزشی
www.my-dars.ir
Telegram: MOHammad_Free

P.5

* مربع کامل‌ها را حفظ و ظرف تو کلکور:

① $x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2 = 0$ ⟨ $x = -1$ → رأس مضاعف مثبت ⟨ $x = 1$ → رأس مضاعف منفی

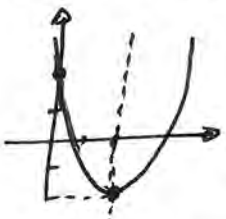
② $x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2 = 0$ ⟨ $x = -2$ ⟨ $x = 2$

③ $x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2 = 0$ ⟨ $x = -3$ ⟨ $x = 3$

④ $4x^2 \pm 4x + 1 = (2x \pm 1)^2 = 0$ ⟨ $x = -\frac{1}{2}$ ⟨ $x = \frac{1}{2}$

* رأس سهمی $-\frac{b}{2a}$ ↳ می‌زاریم تو معادله ↳ عرض رأس هم برابر میاد ↳ عرض را هم با هم داریم

$x_S = -\frac{b}{2a} = 2$, $y_S = -2$ ⟩ $x^2 - 4x + 2$ ← این را شکستیم:



معادله محور تقارن: $x = 2$

* تعیین علامت و نامعادلات گویا

① $\frac{1}{x-2} < 0$ ← مثل سادات: کسری که صورتش معلوم نیست... ← $x - 2 < 0 \Leftarrow x < 2$

② $\frac{x-1}{x-2} < 0$ ← $(x-1)(x-2) < 0 \Leftarrow 1 < x < 2$ ← علامت $\frac{a}{b}$ علامت نمیه!

③ $\frac{x^2-4x+3}{x-2} < 0$ ← جدول ← x: $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ ← مجموع ضرب صورت و مخرج نیز 2 ← مجموع ضرب صورت و مخرج نیز 2

④ $\frac{3x^2-2x}{x^2+4} < 2$ ← $3x^2 - 2x < 2x^2 + 8$ ← $x^2 - 2x - 8 < 0$ ← مخرج ⊕ ← طرفین

⑤ $\frac{x^2+1}{-x^2-3} < 2$ ← مخرج همواره ⊖ ← طرفین ← ضرب عوض میشه.

⑥ $\frac{x^2+1}{x-1} < 2$ ← مخرج ⊕ و ⊖ ← طرفین ← 2 میاد سمت راست و مخرج مشترک

① ② ③ ← ۳ تا حالت ← ۳ تا حالت ← ۳ تا حالت

* $\frac{x^2-2}{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-2-x}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-2}{x} \leq 0$

$\frac{(x+1)(x-2)}{x} \leq 0$ ← x: $-\infty$ | -1 | 0 | 2 | $+\infty$ ← جواب: $(-\infty, -1] \cup (0, 2]$

② مقدمات تابع: معرفی، تعیین دامنه، اعمال روی توابع

۱- بحث تابع بودن یا نبودن! سوالی این است.

- **نمودار دون**: تابع نیست ✗
- **زوج مرتب**: $\{(1,a),(1,b)\}$ تابع نیست مگر اینکه $a=b$
- **نمودار**: خطوط موازی محور yها بیش از یک نقطه قطع نکنه ✗ ✓
- **ضابطه**: $[y]$، $|y|$، y^{2k} یا نسبت شدنی از این‌ها معمولاً تابع نیست.

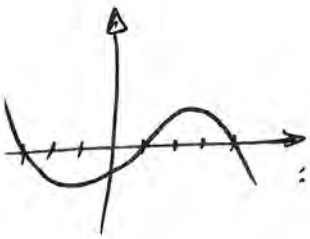
۲- بحث تعیین دامنه

* مخرج صفر نشه * زیر رادیکال فرجه زوج منفی نشه * توابع لگاریتمی $\log_{g(x)} f(x)$ $\begin{cases} f>0 \\ g>0 \\ g\neq 1 \end{cases}$

* $\sqrt{\ }$ مرد، $\sin$ (هوی)، $\cos$ (هوی)؛ دامنش دامنه هوی!

* $\cot$، $\tan$ یکم مخرجی هستن و مخرجشون نباید صفر باشه.

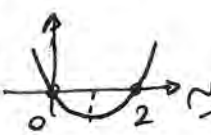
* سوالات معمولی نمودارهای داده شده. مثلاً اگه $f(x)$ این باشه:



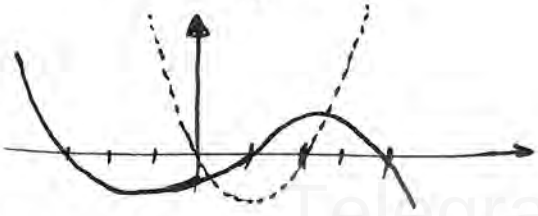
دامنه تابع $\sqrt{x f(x)}$ روی خودش نباید منفی باشه: $[-3,0]\cup[1,4]$

یا دامنه تابع $\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ که از همه باید هم علامت باشن و $f(x)$ صفر نشه: $(-3,0)\cup(1,4)$

یا دامنه $\sqrt{(x^2-2x)f(x)}$ که چون x^2-2x این شکلیه



نباید بین -3 و صفر یک و 2 تا 4 هم علامت باشن:



$(-\infty,-3]\cup[0,1]\cup[2,4]$

@MohammadFree
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:@MohammadFree

P.7

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$ و $g(x)=\log_{x-1}(-x^2+4)$ باشد دامنه توابع زیر را بیابید؟

$D_f: -x^2+6x-5 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$

$D_g: \begin{cases} -x^2+4>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow |x|<2 \Rightarrow -2<x<2 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \ , \ x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$ اشتراک $\rightarrow 1<x<2$

$D_{f\pm g, fxg} = D_f \cap D_g = (1,2)$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x)=0\} = (1,2) - \{?\}$

$x^2=3 \Leftarrow -x^2+4=1$ $\begin{matrix} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{matrix}$ نمی‌دانیم g کجا صفر شده؟! لگاریتم صفر شده پس

$-\sqrt{3}$ که اصلاً توی بازه نیست ولی $\sqrt{3}$ توی بازه $(1,2)$ هست که باید حذف شود.

بنابراین جواب $D_{f/g}$ می‌شود: $(1,2)-\{\sqrt{3}\}$

$f(x-2) \times g\left(\frac{x}{2}\right)$

$1<x-2<5$ (I) $\Rightarrow 3<x<7$

$1<\frac{x}{2}<2$ (II) $\Rightarrow 2<x<4$

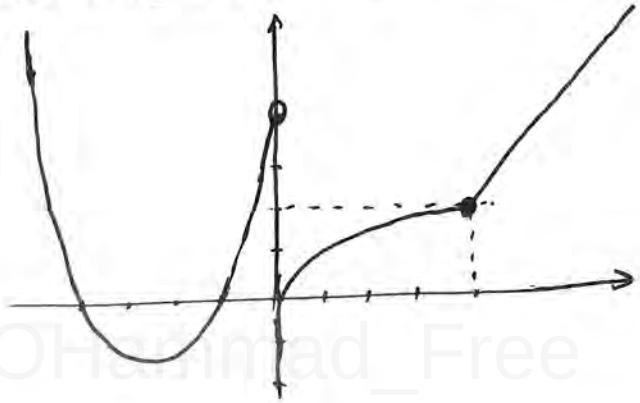
اشتراک I, II $\rightarrow (3,4)$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

* معرفی توابع چند ضابطه‌ای و بیان در دانه‌ریز:

رسم شکل خیلی کمک می‌کند بچه‌های عزیزم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+6x+4 & , x<0 \\ \sqrt{x} & , 0 \leq x \leq 4 \\ x-2 & , x>4 \end{cases}$$



توی این تابع 2 تا نقطه مرزی داریم که خیلی حائزند.

ابتدا $\rightarrow x=0$ $\begin{cases} \text{نامعلوم} \\ \text{معلوم} \end{cases}$

$\leftarrow x=4$

Telegram:MOHammad_Free

③ تابع مرکب

تیپ ① : f و g معلوم ؛ مرکب مجهول

این دسته بابلوترین سوال ممکنه که g و f هم بدهد. کافیه بلد باشی تابع مرکب بنویسی. fog یعنی $f(g(x))$ ؛ تو f هرجا x داری بجاش g می‌ذاری. مثلاً بصورت سوال تستی g و f میدن و میگن gof رو بدست بیار. حل می‌کنیم :

$$f(x) = x^2+x \quad , \quad g(x) = \sqrt{4x+1}$$

$$gof = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2+x)+1} = \sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

تیپ ② : f ، fog معلوم ؛ تابع داخلی مجهول

اینو fog می‌پرسه که g کی بود؟! f رو که گفته؛ بلفتاس اِفی ناضیه بودم؛ بلفتاس اِفی با x بود! ولی کلی مدتی با g نشستم!

صورت سوال

$f(x) = x+5$

$f(g(x)) = 3x-1$

$$\longrightarrow g+5 = 3x-1 \Rightarrow \boxed{g = 3x-6}$$

تیپ ③ : g ، fog معلوم ؛ تابع اصلی مجهول

اینجا دیگه f نداریم یعنی تابع اصلی گم شده. ازش می‌پرسیم :

« $f(x)$ کجایی دقیقاً کجایی؟ کجایی تو بی t؟ تو بی t کجایی؟ ... »

$$g(x) = x-1 \Rightarrow f(x-1) = 2x+7$$

$$f(g(x)) = 2x+7$$

$$x-1 = t \Rightarrow x = t+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) = 2(t+1)+7 \\ f(t) = 2t+9 \end{cases}$$

تیپ ④ : مرکب با جدول و دانسته مرکب :

x اول میره تو g عدد $g(x)$ می‌ره تو f !

مثلاً $\frac{1}{2}$ عدد تو g می‌ره 2 ؛ 2 می‌ره تو f می‌ره 7 ؛

پس جواب می‌شه $(1,7)$ و بدهیم مرکب

$$g = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

$$f = \{(2,7),(4,8),(5,9)\}$$

$$f(g(x)) = \{(1,7),(3,8)\}$$

@MOHammad_Eito
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram.me/mydars

P.9

حالا اگه تو سوال صفحه قبل $f+g$ یا $f-g$ یا $f\times g$ رو خواسته بود فقط زوج‌هایی که با 5 شروع میشن باهم در ارتباط چون شرط وجود این توابع اشتراک دامنه‌هاست. $f+g=\{(5,15)\}$ ، $f\times g=\{(5,54)\}$

طبیعیه که اگر $g(x)$ صفر بود $\frac{f}{g}$ تشکیل نمیشه. $\frac{f}{g}=\{(5,6/9)\}$ ←

* برای یکسین دامنه تابع مرکب هم حتماً از روابط متقابل استفاده کن:

$$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$D_{f(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$

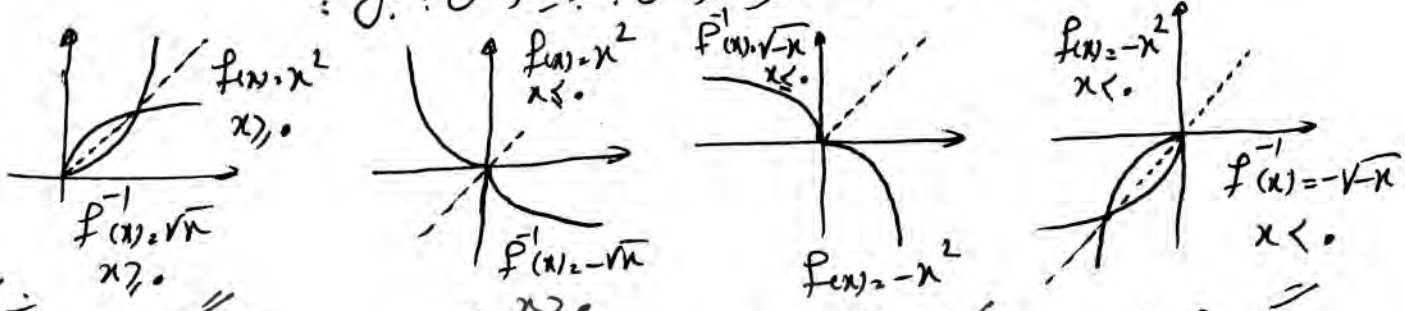
④ تابع یک به یک و معکوس

اولاً که شرط یک به یک بودن دقیقاً برعکس شرایط تابع بودنه. شرط معکوس پذیری هم یک به یک بودنه یعنی اگر تابعی یک به یک نباشه معکوس پذیر نیست و معکوسش تابع نمیشه.

برای ساخت تابع معکوس ← از روی نمودار: نمودار رو نسبت به $y=x$ قرینه کن

از روی ضابطه: اول x ، دوم y ، سوم y بر حسب x

دقت کنید که هر یک از این سه حالت بعد از رأس به قبل:



اگه f نسبا زرد قطع کنه معکوسش تو همون ناحیه مالکیته و نمیره رو برو. ضمناً اگر f صعودی باشه f^{-1} رو فقط روی $x=y$ قطع میکنه

@MOHammadFars
www.my-dars.ir
گروه آموزشی عصر
مرجع درس

P.10

ساخت معکوس از روی ضابطه :

① $f(x)=x^3 \xrightarrow{\text{تعویض}} y=x^3 \xrightarrow{\text{تعویض}} x=y^3 \xrightarrow{\text{y بر حسب x}} y=\sqrt[3]{x}$

② $f(x)=\frac{3x-2}{x+1} \xrightarrow{\text{تعویض}} y=\frac{3x-2}{x+1} \xrightarrow{\text{تعویض}} x=\frac{3y-2}{y+1} \xrightarrow{\text{y بر حسب x}} xy+x=3y-2$

$3y-xy=x+2 \Rightarrow y(3-x)=x+2 \Rightarrow y=\frac{x+2}{3-x}$ ← ضابطه معکوس

③ $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1} \xrightarrow{\text{تعویض}} y=\frac{2^x-1}{2^x+1} \xrightarrow{\text{تعویض}} x=\frac{2^y-1}{2^y+1}$

$\Rightarrow x2^y+x=2^y-1 \Rightarrow x2^y-2^y=-x-1 \Rightarrow 2^y(x-1)=-(x+1)$

$\Rightarrow 2^y=-\frac{(x+1)}{x-1} \Rightarrow 2^y=\frac{x+1}{1-x} \xrightarrow{\text{از طرفین log}} \log_2 2^y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$

$\Rightarrow y=\log_2\frac{x+1}{1-x}$ ← ضابطه معکوس

④ $f(x)=x^2-4x \;;\; [2,+\infty) \xrightarrow{\text{تعویض}} y=x^2-4x \xrightarrow{\text{تعویض}} x=y^2-4y$

$\xrightarrow{\text{y بر حسب x}} y^2-4y+4-4=x \Rightarrow (y-2)^2=x+4 \Rightarrow |y-2|=\sqrt{x+4}$

$y\geq 2 \Rightarrow y-2=\sqrt{x+4} \Rightarrow y=\sqrt{x+4}+2$ ← ضابطه معکوس

⑤ $f(x)=x^3-3x^2+3x \xrightarrow{\text{تعویض}} y=x^3-3x^2+3x \xrightarrow{\text{تعویض}} x=y^3-3y^2+3y$

$\Rightarrow x=\underbrace{y^3-3y^2+3y-1}+1 \Rightarrow x=(y-1)^3+1 \Rightarrow (y-1)^3=x-1$

$\Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}+1$ ← ضابطه وارون

www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.1

خلاصه خالص کل فصل معادلات درجه 2 و روابط بین ریشه‌ها

① تابع درجه دوم و ویژگی‌های سهمی (یادآوری از فصل قبل)

روش‌های پیدا کردن ریشه‌های معادله درجه دوم و رسم انواع سهمی رو تو فصل قبل یاد گرفتیم یادتون رأس سهمی شد $-\frac{b}{2a}$ اگه تو معادله جایگذاریش کنیم عرض رأس بدست میاد. عرض رأس همون مقدار max یا min توی سهمیه خیلی مهمه. خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمیه. اگه صورت سوال بگه دو ریشه حقیقی متمایز $\Delta>0$ ولی اگه بگه

دو ریشه حقیقی $\Delta>0$ ، $\Delta\geq 0$

$\Delta=0$:

$\Delta<0$:

$\Delta\leq 0$:

$\Delta\geq 0$:

② آنالیز خط و سهمی

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+h \end{cases}$$

اول = دوم

$$ax^2+bx+c=mx+h$$

$$ax^2+(b-m)x+c-h=0$$

$$\Delta=(b-m)^2-4a(c-h)$$

$S=\alpha+\beta=-b/a$ ، $P=\alpha\beta=c/a$

$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

③ کاربرد اول: روابط خاص

$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$

$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$

$\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm 2\sqrt{P}}$

متقارن

نامتقارن

یا تو ضرب معادله رو صدق می‌کنه.

یا روابط می‌آریم و یکم وروجک می‌کنیم

مثال ضرب: اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-5x+3=0$ باشند مطلوبه:

$S=5$

$P=3$

(الف) $\alpha^2+\beta^2$

$S^2-2P=25-6=19$

اگه کسی خواست مخرج مشترک بگیریم و ادغام ضرب بود فاکتور گیری می‌کنیم.

(ب) $\sqrt{\alpha^2(5\beta-3)}$ یا نه:

β ریشه معادله پس تو ضرب معادله صدقش

$\beta^2-5\beta+3=0 \Rightarrow \beta^2=5\beta-3$

$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2\beta^2}=\alpha\beta=P=3$

(ج) $5\alpha+3\beta$

مساوی $=4$

$4\alpha+4\beta+\alpha-\beta$

$+(\alpha+\beta)+\alpha-\beta$

S ، $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

طای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Created with Free Version of Watermarkly

P.2 مثال: در معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ مجموع ریشه‌های حقیقی برابر حاصلضرب ریشه‌هاست

$t^2-18t+72=0$ / $(t-6)(t-12)=0$

$t=6 \Rightarrow x^2+x-6=0$ ، $S=-1$ ، $P=-6$

$t=12 \Rightarrow x^2+x-12=0$ ، $S=-1$ ، $P=-12$

$S_{کل}=-2$ ، $P_{کل}=72$

④ کاربرد دوم: ریشه‌های خاص

شرایط ⊕ ریشه: $P>0$ ، $S>0$ ، $\Delta>0$

شرایط ⊖ ریشه: $P>0$ ، $S<0$ ، $\Delta>0$

شرایط ریشه مختلف العلامات: $c<a$ منفی لازم و کافی

اگه فقط 2 تا ریشه مثبت بده
از سطو چهار تا ریشه میاره

TIP ① : سوال مستقیم ← اول شرط Δ رو حساب کن.

TIP ② : ورود مضرب که واقعاً هم مضربه

TIP ③ : بزرگ‌تر از ← منفی‌تر + ناصفر می‌گذره $(c<0)$

TIP ④ : درجه چهارم دوتجزوری: $x^4=t^2 \leftarrow x^2=t$

TIP ⑤ : $ax+b\sqrt{x}+c=0 \rightarrow \sqrt{x}=t \rightarrow x>0 \cdot t^2$ تعداد ریشه‌ها درجه 2 و تعداد زمانی 2 ریشه دارن که تعداد ریشه ⊕ بده!

⑤ کاربرد سوم: معادله‌ی حذفی

جدولی ← $b=0$ ← ریشه‌ی صفر

غیرجدولی ← $a=c$ ← ریشه‌ی مکعوس ⑥ مثال

غیرجدولی ← کل P معلوم ← سه سوت ! ⑦ مثال

غیرجدولی ← کدوم P مجهول ← سه معادله سه مجهول ⑩ مثال

⑥ کاربرد چهارم: معادله‌ی حدیری

جدولی ← معادله حدیری بنویس که ریشه‌هاش ریشه‌های قبلی ← طرفین

غیرجدولی ← معادله حدیری بنویس که ریشه‌های معکوس قبلی ← a و $\frac{1}{a}$ طرفین

غیرجدولی ← روش t ← قدیم x و حدیری t ← جایگذاری

کدوم P حدیری: $x^2-Sx+P=0$

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.1

خلاصه درس رویایی مثلثات؛ به قلم من! یعنی با کمک ساده

مولف اولین و آخرین کتاب آشتی با مثلثات ♡

لوصیح لوصیح لوصیح ؟

صفحات 208 تا 212 کتاب جامع
که عکسشون رو توی کانال گذاشتم الان!
بفرمایید

قبل از شروع مطالعه این جزوه لطفاً صفحات خواسته شده را با دقت مطالعه

کل درس مثلثات تشکیل شده از 5 تا ها!!

1- زاویه ای 2- رابطه ای 3- اعداد ای 4- نمودار ای 5- کاربرد ای

اولین الزام شروع این درس تسلط بر 18 زاویه اصلی و نسبت های مثلثاتی شون!

یعنی به زبان ساده تا ازتون سوال شد $\sin\frac{2\pi}{3}$ یا $\cos\frac{5\pi}{6}$ یا $\tan\frac{7\pi}{4}$ سریعاً با تصویر ذهنی اون زاویه بتونید نسبت خواسته شده رو پیدا کنید. نه اینکه برای $\frac{2\pi}{3}$ از $\pi-\frac{\pi}{3}$ یا برای $\frac{7\pi}{4}$ از $2\pi-\frac{\pi}{4}$ استفاده کنید. حالی زاویه رو با یه بله یا نه بدید که توصیه 208 و صفحه 209 براتون کاملاً تشریح کردم. در 5 مورد!

قدم دوم رابطه ای است که من خودم با خلاصه ای خیلی عزیز از ارائه کنم.

* اولاً: مضارب زوج π هیچ تأثیری روی هیچ کدوم ندارن. البته اگر جمع بشن!

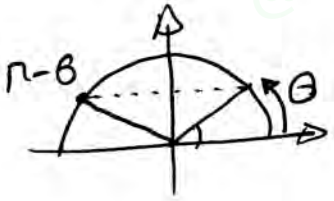
اینجا θ اضافه شد! $\sin(1396\pi+\theta)=\sin\theta$, $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$

* ثانیاً: به $\tan$, $\cot$ مضارب صحیح π هم بی تأثیرن ولی روی $\sin$, $\cos$ تأثیرگذار.

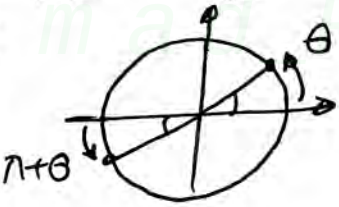
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$, $\cot(1395\pi+\theta)=\cot\theta$

P.2

* ثالثاً: مضارب صحیح π تأثیر ندارد روی Sin, Cos را با شکل یاد بگیر.

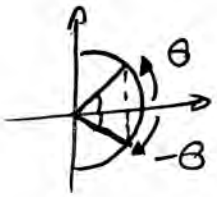


⇒ Sin ها برابر بقیه قرینه.



⇒ tan ها برابر بقیه قرینه!

* رابعاً: کمان $(-\theta)$ یا $(2K\pi-\theta)$



$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

فقط Cos معرف خورده و بقیه قرینه:

* خامساً: مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نسبت را عوض کنید. فقط حواست باشد اول ناحیه را پیدا کن و علامت همون نسبت را بگذار. علامت در آخرین مرحله نسبت را عوض کن.

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$ ناحیه دوم، سینوس مثبت ⇒ جواب $=\cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$ ناحیه دوم، کسینوس منفی ⇒ جواب $=-\sin\theta$

$\tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)$ ناحیه چهارم، tan منفی ⇒ جواب $=-\cot\theta$

و حالا این هم برای حافظه‌های سلطانی:

(1) $\sin^2+\cos^2=1$
2) $\sin^2=1-\cos^2$
3) $\cos^2=1-\sin^2$
4) $1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$
5) $1+\cot^2=\frac{1}{\sin^2}$

(6) $\tan\cdot\cot=1$
7) $\tan=\frac{1}{\cot}$
8) $\cot=\frac{1}{\tan}$
9) $\tan=\frac{\sin}{\cos}$
10) $\cot=\frac{\cos}{\sin}$

(11) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ⇒ (14) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(12) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ⇒ (15) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

(13) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ⇒ (16) $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

فرمول‌های 14 و 15 به ازای چند تا اگه دقت کنی.

@MOHammadFree
Telegram: MOHammadFree
www.tayfars.ir

P.3

روابط 15 و منابع ارزشمند آن

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

بال چپ برحسب Cos

$1-\cos^2$ یعنی به جای $\sin^2$ میگیم

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)$$

(17) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$

(19) $\Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

بال راست برحسب Sin

$1-\sin^2$ یعنی به جای $\cos^2$ میگیری

$$\cos 2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$$

(18) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$

(20) $\Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

حالا می‌ریم سه تا حالت داریم

1) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

2) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\left(\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)$ ← رابطه 16 رو هم یاد بگیر

3) $\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{\sin}{\cos} + \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{\sin^2+\cos^2}{\sin\cos} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$

4) $\tan\alpha - \cot\alpha = \dfrac{\sin}{\cos} - \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{\sin^2-\cos^2}{\sin\cos} = \dfrac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = -2\cot 2\alpha$

← جمع و تفریق cot, tan

5) $\sin(\pi/4 \pm \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha \pm \sin\alpha) \Rightarrow \sqrt{2}\sin(\pi/4 \pm \alpha) = \cos\alpha \pm \sin\alpha$

6) $\cos(\pi/4 \pm \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha \mp \sin\alpha) \Rightarrow \sqrt{2}\cos(\pi/4 \pm \alpha) = \cos\alpha \mp \sin\alpha$

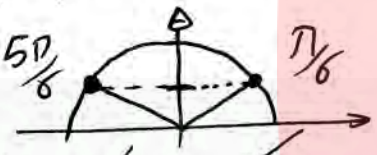
* $\sin+\cos$ دیدی یه توان 2 برسونی میشه $\sin^2+\cos^2$ که برابر با 1 میشه!

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:@MOHammad_Free

P.4

و بالاخره رسیدیم به معادلات مثلثاتی

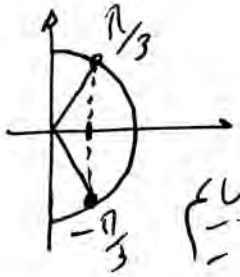
روش حل معادلات مثلثاتی به سبک من احتیاج به هیچ فرمولی نداره. فقط کافیه به زاویه‌ها وارد باشی. وقتی به شما میگن $\sin\frac{\pi}{6}=?$ شما در پاسخ میگی $\frac{1}{2}$ ولی وقتی از شما میخوان معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ رو حل کنی یجک فرق میکنه. شما سریعاً یک دایره میکشی و $\frac{1}{2}$ رو روی محور sin ها مشخص میکنی. بعد کافیه اون نقطه رو با خط‌چین به چپ و راست وصل کنی تا بخوره به دایره.



زاویه‌ای که معلوم شد رو اسمش هرکدوم یه $2k\pi$ بذار چون اگه یه دور کامل بزنن دوباره به همونجای اول میرسن: بنابراین جواب آخر: $2k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

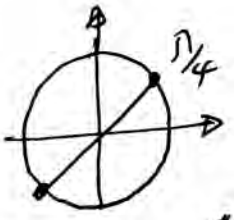
حالا اگه معادله کسینوس باشه. مثلاً $\cos x=\frac{1}{2}$.

اول جایی که $\cos$ میشه $\frac{1}{2}$ رو مشخص کنیم. بعد مثل بالا برم و این‌بار میام



روی $\cos$ میشه $\frac{1}{2}$ میشه. جواب $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

و اگر تانژانت باشه. مثلاً $\tan x=1$



اینجا هم جواب single نیست بلکه جفت جفت است. $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

* $\sin$ و $\cos$ هم هرکدوم یه جا دیل دارن

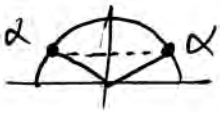
$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$

$\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

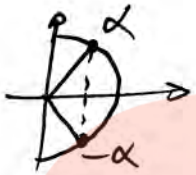
@MOHammad_Free
ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.5 /

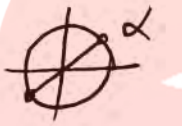
* اگر معادلات مثلثی به صورت خاص مثلاً $\sin x = \sin\alpha$ حل شوند چه؟

* $\sin x = \sin\alpha$ 

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

* $\cos x = \cos\alpha$ 

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

* $\tan x = \tan\alpha$ 

$\Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$

① سینوس $\rightarrow$ $\sin x = -\sin 3x$

$\Rightarrow \sin x = \sin(-3x) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - (-3x) \Rightarrow -2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

② کسینوس $\rightarrow$ $\cos x = -\cos 3x$

$\Rightarrow \cos x = \cos(\pi - 3x) \Rightarrow x = 2k\pi \pm (\pi - 3x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \dots \\ -2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = \dots \end{cases}$

* نکته: سوالات ویژه معادلات مثلثی به حل یک معادله درجه دوم ختم می‌شوند که در آن‌ها با تغییر متغیر به یک معادله ساده مثلثی می‌رسیم:

مثل سوال تکمیلی 95

$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$

$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \rightarrow$ دو برابر زاویه

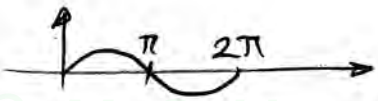
$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(2t+1) = 0 \Rightarrow t = 2$ (غ) ، $t = -\frac{1}{2}$! 25°

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

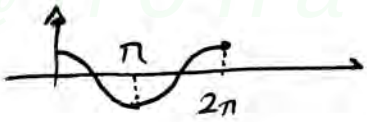
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram.Mohammad_Free

P.6

۱ نمودارها :

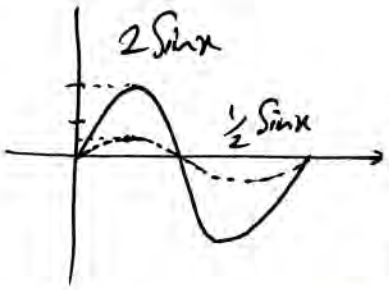


نمودار سینوس



نمودار کسینوس

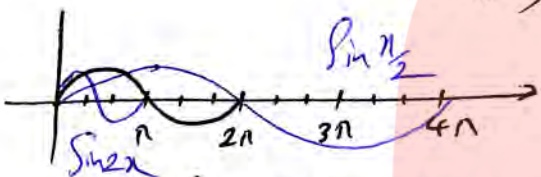
دوره تناوب $\sin(ax+b)$ و $\cos(ax+b)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$.



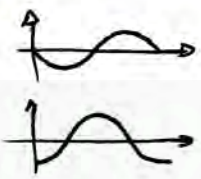
* توان زوج و قدر مطلق دوره تناوب را نصف می‌کند .

* اگر پشت نسبت عددی ضرب شده روی برد تأثیر می‌گذارد .

* اگر داخل تابع عددی ضرب و تقسیم شده روی دامنه :

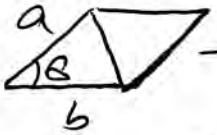


* اگر منفی پشت sin و cos بیاید قرینه می‌شود

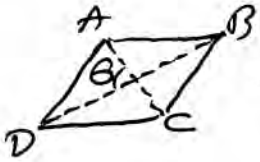


۱ مساحت‌ها و قضایای سینوس‌ها و کسینوس‌ها

$\rightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin\theta$



$\rightarrow S = ab \sin\theta$

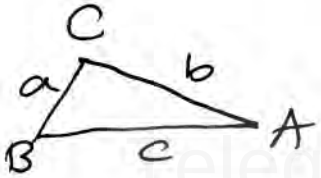


$\rightarrow S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\theta$

قضیه کسینوس‌ها :

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

قضیه سینوس‌ها :

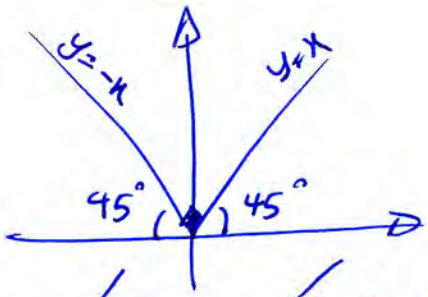


$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

$f_{em} = |x|$

خلاصه خالص هفته چهارم



من قدر ایکسم، من قدر ایکسم
با اینکه پیوسته ام، شکستی نیز نیستم

① قدر مطلق

#1 پیش از ما علامت‌ی خدا بر اساس قانون زیر

$$|u| = \begin{cases} u & , \text{if } u \geq 0 \\ -u & , \text{if } u < 0 \end{cases}$$

#2 خواص و ویژگی‌های مهم برای کنکور:

① $\sqrt{u^2} = |u|$ → البته که از زیر رادیکال با کسب قدر مطلق بیرون میاد

حواست باشه $(\sqrt{u})^2 = u$ مثل چون زیر رادیکال مثبت بوده قدر نمی‌خوار!

② $|a-b| = |b-a|$ → فاصله a تا b همون فاصله b تا a

$|x-a|$ → فاصله x تا a ، $|x-0| = |x|$ → فاصله x تا صفر

مخاطر بسپین که وقتی گفتن $|x| = 2$ یعنی گفتن $x = \pm 2$ ، فهمیدی عزیزم؟!

③ $|x^2| = |x|^2 = x^2$ → همونطور که تو مدرسه یاد گرفتیم چیزی که مثبت قدر نمی‌خوار

بعضی سوالات اینن: بعضی سوالات اینن و بعضا سوالات!!! سوی استفاده می‌شه.

④ $|xy| = |x|.|y|$ ، $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ → خاصیت jumping

مثل بالا گاهی وقتا هجده یکی میشه و گاهی کلمات متفاوتی!

⑤ $|x+y| \leq |x|+|y|$ → تعمیم → $|x+y+z+\cdots| \leq |x|+|y|+|z|+\cdots$

تک تک بزرگتره؛ یعنی ساده‌تر!! این از تعمیم نامساوی مثلث

و تساوی هم علامتن!

* 3 معادلات و نامعادلات قدرمطلقی

قدرمطلقی رو نمی‌تونی با بچه‌بازی بدون ضرب و تقسیم بسازی!

① $|u| = |v| \Rightarrow u = \pm v$ → بدون شرط

② $|u| = v \Rightarrow u = \pm v$ → شرط داره $v \geq 0$

③ $|u| \leq |v|$ or $|u| \geq |v|$ → توی حالتی که مجبوریم به توان 2 ببریم.

④ $|u| < a \Rightarrow -a < u < a$ → بینشون

⑤ $|u| > a \Rightarrow u > a$ ⁄⁄ $u < -a$ → خارجشون

* 4 نمودارهای قدرمطلقی

① $|f(x)|$

اول f رو می‌کشیم هرجا زیر بود بالا می‌بریم.

$|\sin x|$

② $f(|x|)$

اول f رو می‌کشیم هرجا چپ بود پاک می‌کنیم، راست کپی می‌کنیم.

$\sin|x|$

③ $|f(x)| \pm g(x)$

شرط بندی می‌کنیم یکی برای راست

قانون اصلی اول درس میگه رو

برحسب داریم و علیه دوضابطه رو می‌کشیم.

$x + |x| = x + \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$x|x| = \begin{cases} x(x), & x \geq 0 \\ x(-x), & x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

④ گودی: $|x-a| + |x-b|$

۱- ریشه‌ها رو پیدا کن

۲- ناصله رو پیدا کن

۳- برو بالا

-2 ، 2

$|x+1| + |x-2|$

-1 ، 2

۱- ریشه‌ها رو پیدا کن

۲- عرضشون رو پیدا کن

۳- وصلشون کن!

⑤ سدی: $|x-a| - |x-b|$

$f(x) = |x+1| - |x-2|$

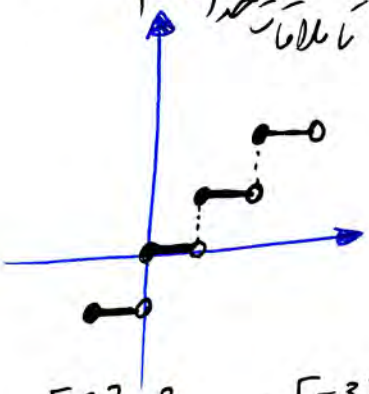
-1 → $f(-1) = -3$

2 → $f(2) = 3$

@MOHammad_Free
Telegram: @MOHammad_Free
www.my-dars.ir

P.3

② جزء صحیح ℝ



$[2]=2$, $[-3]=-3$

* 1 مثال از فاصلات ها خواهد بر اساس قانون زیر

$$[u]=\begin{cases} \text{خودش} & \text{if } u\in\mathbb{Z} \\ \text{عدد صحیح قبلیش} & \text{if } u\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

$[2,3]=2$, $[3.9]=3$, $[\pi]=3$, $[e]=[2.71]=2$, $[-1.5]=-2$

* 2 خواص و ویژگی‌های مهم برای نمودار

① $[x+y]=\begin{cases} [x]+[y] & \text{(I) مجموع اعشاری } x \text{ و } y \text{ کمتر از } 1 \\ [x]+[y]+1 & \text{(II) مجموع اعشاری } x \text{ و } y \text{ بیشتر از } 1 \end{cases}$

(I) مثال: $[\pi]=[3.14]=3$, $[e]=[2.71]=2 \Rightarrow [\pi+e]=[\pi]+[e]$

چون مجموع اعشاری π و e یعنی 0.14 و 0.71 کمتر از 1 است!

(II) مثال: $[\sqrt{2}]=[1.4]=1$, $[\sqrt{3}]=[1.7]=1 \Rightarrow [\sqrt{2}+\sqrt{3}]=[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+1$

3.1 $\quad$ 1 $\quad$ 1

چون مجموع اعشاری $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ بیشتر از 1 است و در زمان درس دادن در کلاس نوشتن جوابشون!

② $[x\pm K]=[x]\pm K$ عدد صحیح میتونی بیای بیرون بیا این برابره!! به این برابره

قدر مطلق؛ قدر مطلق؟ کجا میشه؟ کجا میشه داری؟ و این داره؟ چون این برابره!

③ $[Kx]\neq K[x]$ $\xrightarrow{\text{مثلاً}}$ $[2x]\neq 2[x]$ این دو لزوماً مساوی نیستن

$[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$

$x=1.6$ $\quad$ $x=1.4$

$[2\times 1.6]\neq 2[1.6]$ $\quad$ $[2\times 1.4]=2[1.4]$

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: @MOHammad_Free

* 3 معادلات و نامعادلات براکت

* $[u]=k \Rightarrow k \le u < k+1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0 \le x < 1$

* $[x]=\frac{1}{2} \rightarrow$ جواب ندارد ، * $[x-3]=1 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4 \le x < 5$

* $[x+[x]]=2 \Rightarrow 2[x]=2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow 1 \le x < 2$

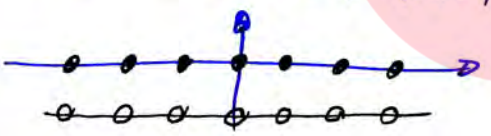
* $[x+\frac{2}{3}]+[x-\frac{1}{3}]=3 \Rightarrow [x-\frac{1}{3}+1]+[x-\frac{1}{3}]=3$

$\Rightarrow 2[x-\frac{1}{3}]=2 \Rightarrow [x-\frac{1}{3}]=1 \Rightarrow 1 \le x-\frac{1}{3} < 2 \Rightarrow \frac{4}{3} \le x < \frac{7}{3}$

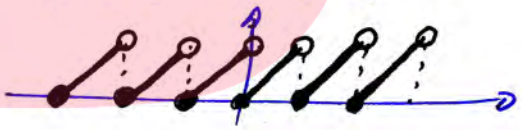
* $[3x-5]+2[x-2]=x-1 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} 3x-5+2x-4=x-1 \Rightarrow x=2$

* $[x]+[2x]=0 \Rightarrow \begin{cases} [x]=0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \\ [2x]=0 \Rightarrow 0 \le 2x < 1 \Rightarrow 0 \le x < \frac{1}{2} \end{cases}$ اشتراک $\rightarrow [0, \frac{1}{2})$

* $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & , x\in\mathbb{Z} \\ -1 & , x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$



، $0 \le x-[x] < 1$



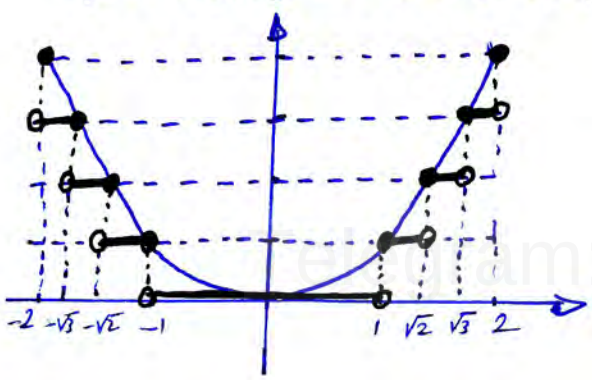
* $[x] \ge 1 \hookrightarrow x \ge 1$ * $[x] > 1 \hookrightarrow x \ge 2$ * $[x] < 1 \hookrightarrow x < 1$ * $[x] \le 1 \hookrightarrow x < 2$

* 4 نمودارهای براکت

① $[f(x)]$ ← نمودار داریم / سوم رسم / همان را پیدا کرده / بقیم کنیم

② $[f(x)] \overset{?}{=} g(x)$ ← نمودار

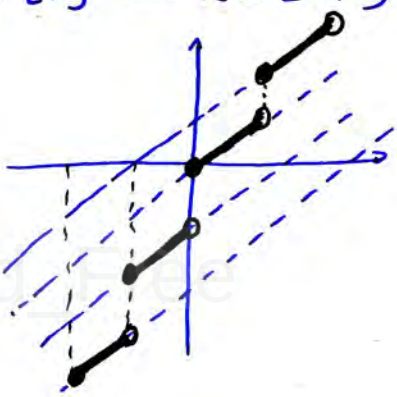
$f(x)=[x^2] \rightarrow x\in[-2,2]$



$y=x+[x] \rightarrow x\in[-2,2]$

$-2 \le x < -1 \Rightarrow y=x-2$
$-1 \le x < 0 \Rightarrow y=x-1$
$0 \le x < 1 \Rightarrow y=x$
$1 \le x < 2 \Rightarrow y=x+1$

هر خط رو تو بازه خودش رسم کنیم



P.5

③ حدود پیوستگی

* 1 کجاها صدق دارد؟

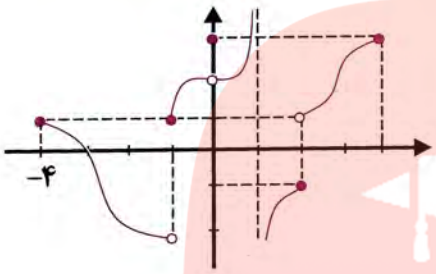
① نمودار ← رفتار شاخه‌ها را پیگیری می‌کنیم

② ریشه مخرج ← مخرج به نقاط توش صفر می‌شه حساسه

③ ریشه در مطلق ← مقدارهم مثل مخرج / حساسه.

④ صحیح کننده برابر ← برابر به نقاط توش $\mathbb{Z}$

① نمودار



$\lim_{x\to ۴} f(x)=۱$, $\lim_{x\to ۳} f(x)=۰$, $\lim_{x\to ۴} f(x)=۳$

$\lim_{x\to -۱} f(x)=\begin{cases}-۱^+=۱\\ -۱^-=-۲\end{cases}$ ⊗ $\lim_{x\to ۲} f(x)=\begin{cases}۲^+=۱\\ ۲^-=-۱\end{cases}$

$\lim_{x\to ۰} f(x)=۲$, $f(۰)=۳$ $\lim_{x\to ۱} f(x)=\begin{cases}۱^+=-\infty\\ ۱^-=+\infty\end{cases}$

$\lim_{x\to ۲^+} f(|x|)=f(|-۲^+|)=f(۱/۹)=f(۲^-)=-۱$

$\lim_{x\to ۴^-}[f(x)]=[۳^-]=۲$, $\lim_{x\to ۳^+}[f(x)]=[۱^-]=۰$

② ریشه مخرج

عامل درجه اول

عامل درجه دوم

عامل شکست ناپذیر

$\frac{+\text{عدد}}{۰^+}=+\infty$, $\frac{+\text{عدد}}{۰^-}=-\infty$, $\frac{-\text{عدد}}{۰^+}=-\infty$, $\frac{-\text{عدد}}{۰^-}=+\infty$

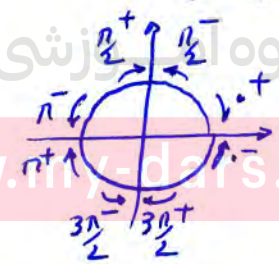
* $\lim_{x\to ۲}\frac{x}{x-۲}$ ⟨ $۲^+: \frac{۲}{۲\cdot۱-۲}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$ ⟨ $۲^-: \frac{۲}{۱\cdot۹-۲}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$

* $۱+۰^+=۱^+$ * $۱-۰^+=۱^-$

* $۱+۰^-=۱^-$ * $۱-۰^-=۱^+$

* $\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱}{x^۲-۳x+۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱}{(x-۱)(x-۲)}$ ⟨ $۱^+: \lim_{x\to ۱}\frac{۲}{(۱^+-۱)(۱-۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲}{(۰^+)(-۱)}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$ ⟨ $۱^-: \lim_{x\to ۱}\frac{۲}{(۱^--۱)(۱-۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲}{(۰^-)(-۱)}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$

* $\lim_{x\to \pi}\frac{۱}{\sin x}$ ⟨ $\pi^+: \frac{۱}{۰^-}=-\infty$ ⟨ $\pi^-: \frac{۱}{۰^+}=+\infty$



* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{۱}{\cos x}$ ⟨ $\frac{\pi}{2}^+: \frac{۱}{۰^-}=-\infty$ ⟨ $\frac{\pi}{2}^-: \frac{۱}{۰^+}=+\infty$

* $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\ln x}$ ⟨ $۰^+: \frac{۱}{۰^+}=+\infty$ ⟨ $۰^-: \frac{۱}{۰^-}=-\infty$

* $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

وقتی Sin و Cos دارن یک سری هیجده ⑦ میشن!

* $\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{x+\pi/۶}{\tan x-\sqrt{۳}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\frac{\pi}{۲}}{\tan\frac{\pi}{۳}-۳}$ ⟨ $\frac{\pi}{۳}^+: \frac{\frac{\pi}{۲}}{\sqrt{۳}^+-\sqrt{۳}}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{۰^+}=+\infty$ ⟨ $\frac{\pi}{۳}^-: \frac{\frac{\pi}{۲}}{\sqrt{۳}^--\sqrt{۳}}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{۰^-}=-\infty$

ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram/Mohammad Eree

③ رفع قدرمطلق

$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x+1} = 1$ ، $\lim_{x\to -2} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to -2} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1$

$\lim_{x\to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$ $\begin{cases} -1^+ : \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x+1} = 1 \\ -1^- : \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 \end{cases}$ ⓧ ⇒ حد نمی‌گیرد در صورت وجود مساوی نیست این که حد نیست یعنی حد ندارد!

④ صحیح کننده بزرگ

$\lim_{x\to \frac{1}{2}} [x] - [\frac{1}{2}] = 0$ ، $\lim_{x\to 1} [x] \begin{cases} 1^+ : 1 \\ 1^- : 0 \end{cases}$ ، $\lim_{x\to 3} [\frac{x}{2}] = [\frac{3}{2}] = 1$

$\lim_{x\to 4} [\frac{x}{2}] \begin{cases} 4^+ : [\frac{4^+}{2}] = [2^+] = 2 \\ 4^- : [\frac{4^-}{2}] = [2^-] = 1 \end{cases}$ ⇒ حد نمی‌گیرد

* تنها عاملی که می‌تونه حال قدرمطلق رو تو این جور سوالا خراب کنه عامل صفر کننده است.

حالا دیگه حد دارند!

$\lim_{x\to 4} (x-4)[\frac{x}{2}] = 0 \times$ عدد $= 0$ ←

* 2 رفع ابهام

صفر صفر ← 100 بار

$\infty - \infty$ ← 2 بار ← مخرج مشترک

$0 \times \infty$ ← 1 بار ← عامل بی‌نهایت شونده مخرج مشترک

هم ارزی { جبری { پرتوان ← توجه جمله پرتوان
کل توان ← توجه جمله کم توان
مثلثاتی ← سینوس و تانژانت ها با شبیه هستند
نمایی ← $1-e^{mx}$ شبیه mx توان m ضرب m

هوپیتال : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

شرایط استفاده
1- هم لیزی مبنایی نداریم.
2- عدد ثابت نباشد.
3- از ∞ دوری از بی‌نهایت صفر نشود.
4- نسبت مثلثاتی دیگری تابع صفر نشود.

صفر / صفر

هوپیتال

ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@MOHammad_Free

پیوستگی ✱3

✱ همان صدف فقط باید چپ و راست و مقدار هم برابر باشد و بتوانیم اعلام کنیم تابع تک‌ضابطه مورد نظر پیوسته است.

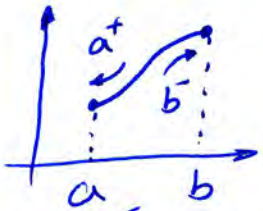
$$f(x)=\begin{cases} g_1, & x<a \\ g_2, & x>a \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} g_1, & x\neq a \\ g_2, & x=a \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} g_1, & |x|<a \\ g_2, & |x|\geq a \end{cases}$$

در یک نقطه درونی a ← در یک نقطه درونی a ← در a و $-a$

بالایی برای حد و مابینی مقدار

✱ پیوستگی روی بازه

شرط اول: تو بازه (a,b) پیوسته باشه
شرط دوم: در a از راست و در b از چپ ← $[a,b]$



دنباله‌ها ✱4

سه تا صفت داریم:

1) همگرایی ← حد دارن یا نه
   - جواب عدد شد ← دنباله همگراست
   - در غیر اینصورت واگراست
2) کرانداری ← 1) هر دنباله همگرا کراندار
   - 2) هر دنباله‌ای که ∞ نشه کرانداره مثل $\sin n$, $(-1)^n$
3) یکنوایی: همه حالا رو می‌ریزیم و با حد مقایسه می‌کنیم
   - زیاد شونده بود صعودی
   - کم شونده بود نزولی

روش‌های کار با حد همگرایی

1) قاعده‌ی توان ← توان‌ها
2) قاعده‌ی ریشه‌ها ← نمایی‌ها
3) رادیکال‌ها ← 3 حالت
4) ریشه ← صورت و مخرج هم خانواده نباشن
5) $\{c^n\}$ ← 4 حالت

① یک توان

- $\frac{n^2+1}{n+3}$ → واگرا به ∞
- $\frac{n+1}{n^2+1}$ → همگرا به صفر
- $\frac{2n+1}{3n+5}=\frac{3}{5}$ همگرا به

② یک نمایی

$$\frac{3^{n+1}+2^{n+5}}{3^{n+2}+2^{n+7}}=\frac{3^n\times 3}{3^n\times 3^2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{3^{n+5}+2^{2n+1}}{3^{n+8}+2^{2n+3}}=\frac{2^{2n}\times 2}{2^{2n}\times 2^3}=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}}\simeq\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$$

← توی این حالت مجبور شدیم نبازیم

③ رادیکال‌ها

- $\frac{n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}=\frac{1}{2}$
- $\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2n-\sqrt{n^2+1}}=\frac{n+n}{2n-n}=2$
- $\frac{n-\sqrt{n^2+2n}}{2n-\sqrt{4n^2-16n}}=\frac{n-\sqrt{1}\left(n+\frac{2}{2\times 1}\right)}{2n-\sqrt{4}\left(n-\frac{16}{2\times 4}\right)}=\frac{n-n-1}{2n-2n+1}=-1$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
@MoHammad Free
Telegram:@Mohammad_Free

P.8

④ قاعده رشد

$\frac{c}{\text{ضد}} = \infty$ ↗

$\frac{\text{ضد}}{c} = 0$ ↘

$n! >> a^n >> n^k >> \sqrt[k]{n} >> \log_k n$

توانی — نمایی

⑤ $\{c^n\}$

$c=1 \rightarrow 1^n = \{1,1,1,\dots\}$

$c=-1 \rightarrow (-1)^n = \{-1,1,-1,1,\dots\}$

هم‌دار با صفر

$|c|<1$ ↗ $c=\frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2})^n = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$

↘ $c=-\frac{1}{2} \rightarrow (-\frac{1}{2})^n = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\}$

هم‌دار با صفر

$|c|>1$ ↗ $c=2 \rightarrow 2^n = \{2,4,8,\dots\}$

↘ $c=-2 \rightarrow (-2)^n = \{-2,4,-8,16,\dots,64 \rightarrow +\infty, -32 \rightarrow -\infty\}$

واگرا

برخورد با سئوالات: اول ∞ می‌دیم بعضیا ← اگه تکنیک لو نشد، OK

اگه نشد شروع کنیم از $n=1$ بیاریم 2 و ...

عوامل نوسانی مثل $(-1)^n$ و $\sin n\pi$ اگر مخرج هم کابین همگرا به صفر داشت ولی از قدر مطلق بزرگ‌تر

اگر دنبال عادی بودم مریم و Marya حواسم شد؛ حد دنبال رو بهت بیار ولی اگر بی‌خانواده بود باید بررسی میشد.

$\frac{n}{3^n} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \dots, \frac{64}{3^{64}}, \dots\}$ Marya ①

هم‌دار با صفر ← مریم

S_n هندسی $= \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ ، S_n عددی $= \frac{n}{2}(a+L)$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.1

خلاصه خالص مشتق رگه بزرگ

① مشتق گیری و قوانین

کل قوانین در یک نگاه

1) $y=c \Rightarrow y'=0$ 2) $(x^n)'=nx^{n-1}$ 3) $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

4) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 5) $(uv)'=u'v+v'u$ 6) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

7) $\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$ 8) $\left(\frac{k}{x}\right)'=\frac{-k}{x^2}$ 9) $\left(\frac{k}{u}\right)'=\frac{-ku'}{u^2}$

10) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 11) $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ 12) $(\sqrt[m]{u^n})'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

13) $(\sin u)'=u'\cos u$ 14) $(\cos u)'=-u'\sin u$ 15) $(\tan u)'=u'(1+\tan^2 u)$

16) $(\cot u)'=-u'(1+\cot^2 u)$ 17) $(\sin^n u)'=nu'\cos u\sin^{n-1}u$ 18) $(e^x)'=e^x$

19) $(e^u)'=u'e^u$ 20) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 21) $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

*1 مشتق گیری از ضوابط اولیه و پیچیده: تا حد امکان ساده کن و بعد مشتق بگیر.

$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$

$y=\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 4x=\frac{1}{4}\sin 4x$

$y=\frac{x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}(x+3)}{\sqrt{x^2+3x}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x+3}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}$ ← نیازی به مشتق گیری و حساب نیست.

*2 مشتق گیری از عامل صفر شونده: کافیه از عامل صفر شونده مشتق بگیری و بعد عدد بذاری

$f(x)=\frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \rightarrow f'(1)=\frac{\sqrt[5]{3(1)-2}}{(5(1)-3)^4}=\frac{1}{16}$

@MOHammad_Free
Instagram.com/@MOHammad_Free
گروه آموزشی عصر
www.my-cars.ir

P.2

3 - مشتق گیری به کمک انتگرال *

$f(x) = (x+\sqrt{x^2+2})^5$
$g(x) = (x-\sqrt{x^2+2})^5$ $\Rightarrow f'g+g'f = (fg)'$

$y = f\cdot g = \left((x+\sqrt{x^2+2})(x-\sqrt{x^2+2})\right)^5 = (x^2-x^2-2)^5 = -32 \Rightarrow y'=0$

4 - مشتق با یک بار مشتق گرفتن *

$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \rightarrow \left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\cdot u'$

$\left(\frac{2x+1}{-3x+5}\right)' = \frac{(2)(5)-(-3)(1)}{(-3x+5)^2} = \frac{13}{(-3x+5)^2} \rightarrow \left(\frac{2\sin x+1}{-3\sin x+5}\right)' = \frac{13}{(-3\sin x+5)^2}\cdot\cos x$

5 - مشتق گیری از قدر مطلق و براکت *

سوالاتی در مورد این دو دسته عزیز سیاست حذفی قدر مطلق حذف می‌شود. براکت عدد می‌شود.

$f(x) = x|x-1|+x[x]$

$1^+: x(x-1)+x = x^2 \Rightarrow f'(1^+) = 2(1) = 2$
$1^-: x(-x+1)+0 = -x^2+x \Rightarrow f'(1^-) = -2(1)+1 = -1$

$g(x) = x|\sin\pi x|$

$1^+: x|\sin\pi^+| = x(-\sin\pi x)$ → حالا مشتق بگیر
$1^-: x|\sin\pi^-| = x(\sin\pi x)$ → حالا مشتق بگیر

$h(x) = x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$

$2^+: x|\cos\frac{\pi}{2^+}| = x|\cos(\frac{\pi}{2})^-| = x(\cos\pi/x)$ → حالا مشتق بگیر
$2^-: x|\cos\frac{\pi}{2}| = x|\cos(\frac{\pi}{2})^+| = x(-\cos\pi/x)$ → حالا مشتق بگیر

6 - تعریف مشتق: *

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

@Mohammad_Free
Telegram.Me/Hammad_Free
www.my-dars.ir

P.3

② مشتق گیری از ضوابط ضمنی | Explicit forms! 😊

معمولا مشتق گیری مقدماتی خودمان با این تفاوت که y ها روبرشکل ها داریم!

$y^2 = \sqrt{y} + \ln y + x \sin e^y$ ⟶ تابع ضمنی

$\downarrow$ مشتق

$2yy' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{y'}{y} + (1)\sin e^y + y' e^y \cos e^y (x)$

گاهی هم برحسب x و با جایگذاری مقادیر داده شده مربوط میباد. مراقب!

③ نوشتن معادلات مماس و قائم بر منحنی

* 1 - از نقطه واقع بر منحنی

- معادله‌ی مماس و قائم بر منحنی $y = x^2 + \dots$ را در نقطه $x=1$ بنویسید:

گام اول: $x=1$ رو توی معادله جایگذاری می‌کنیم تا مختصات نقطه کامل بشه: $(1, \ )$

گام دوم: مشتق تو نقطه برای شیب مماس رو بدست میاریم: $y' = 2x \xrightarrow{x=1} m=2$

گام سوم: اگر شیب قائم رو خواستیم، شیب مماس رو برعکس و معکوس می‌کنیم: $m_{\perp} = -\frac{1}{m_{مماس}}$

گام چهارم: حالا با داشتن (x_1, y_1) و m معادله خط رو می‌نویسیم: $y - y_1 = m(x - x_1)$

معادله قائم: $y - 4 = -\frac{1}{2}(x-1)$ و معادله مماس: $y - \ = 2(x-1)$

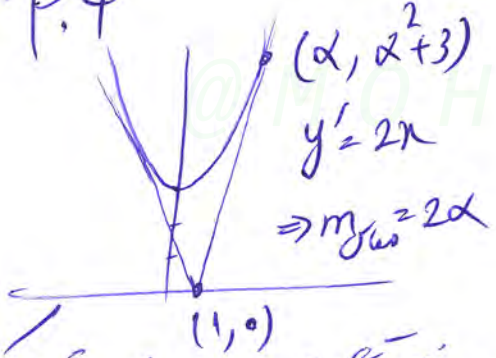
* 2 - از نقطه خارج منحنی

- معادله مماس و قائم بر منحنی $y = x^2 + 3$ از نقطه $(1, 0)$ را بنویسید:

گام اول: چون نقطه داده شده داخل معادله صدق نمی‌کند پس خارج از منحنیه.

www.my-dars.ir
Telegram: @MyHamdad_Free

P.4



گام دوم: نقطه تماس را به صورت عرضی α نامگذاری کنیم

گام سوم: با نقطه و شیب عرضی معادله خط را می‌نویسیم

$$y - \alpha^2 - 3 = 2\alpha(x - \alpha)$$

گام چهارم: حالا چون نقطه مورد نظر روی خط مماس قرار دارد مختصاتش را در معادله خط صدق می‌کند.

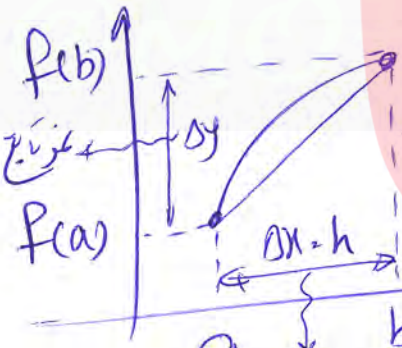
عرضی بجای x و y را جانداری می‌کنیم:

$$0 - \alpha^2 - 3 = 2\alpha(1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = -\frac{c}{a} = 3 \end{cases} \rightarrow \text{نقاط تماس}$$

تذکر: اگر معادله خواسته شده روی خط عمود باشد $-\frac{1}{2\alpha}$.

④ آهنگ متوسط و لحظه‌ای



$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* آهنگ متوسط و لحظه‌ای تابع $y = x^2$ در بازه $[1,5]$: $\frac{5^2 - 1^2}{5-1} = 6$

نقطه x_1: $2(1) = 2$

⑤ رابطه بین پیوستگی و مشتق‌پذیری

شعر معروف: من مدرسم من مدرسم ؛ با اینکه پیوسته تمام مشتق‌پذیر نیستم.

من زاویه دارم چون زاویه دارم ؛ نیستم نسخم چون قافیه ندارم!

پیوستگی برای مشتق‌پذیری شرط لازم ولی کافی نیست. هر مشتق‌پذیری پیوسته است ولی هر پیوسته‌ای مشتق‌پذیر نیست مثل همین مدرسه‌ی تو x_0 !

پس اگر دو ضابطه برای داده و نقطه مشترکشان "پیوسته هم بوده و شرط مشتق" را محاط کاریم.

@MoHammad Free
ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: @MathHammad

P.5

⑥ مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

$y = f(\sin x) \Rightarrow y' = (\sin x)' f'(u)$

$y = f(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$

$y = f(\sin x) \Rightarrow y' = \cos x \, f'(\sin x)$

* $y = \tan^2 \pi u \Rightarrow y' = 2(\pi u')(1+\tan^2 \pi u)\tan(\pi u)$

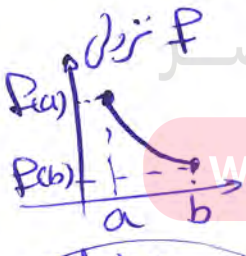
$u = x + \sqrt{x}$ ← $u_{1/4} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ → حاد
← $u' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2(\frac{1}{2})} = 2$ → حاد

* $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \frac{2u'}{2\sqrt{2u}} + \frac{u'}{u^2}$

$u = \sin^2 x - \cos 2x$ ← $u_{\pi/4} = \sin^2(\pi/4) - \cos \pi/2 = \frac{1}{2}$ → حاد
← $u' = \sin 2x + 2\sin 2x = 3\sin 2x \underset{\pi/4}{=} 3$ → حاد

⑦ یکنوایی و جهت تقعر

$b > a$
$f(b) > f(a)$



$b > a$
$f(b) < f(a)$

$f' \geq 0$: صعودی
$f' > 0$: اکیداً صعودی *

$f' < 0$

$f' > 0$ سهمی باز رو به بالا: $f'' > 0$
سهمی باز رو به پایین: $f'' < 0$

* f'' جهت تقعر را مشخص می‌کند

@MOHammad Free
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram.MOHammad_Free

P.6

⑧ انواع و اقسام اکسترمم نسبی و مطلق

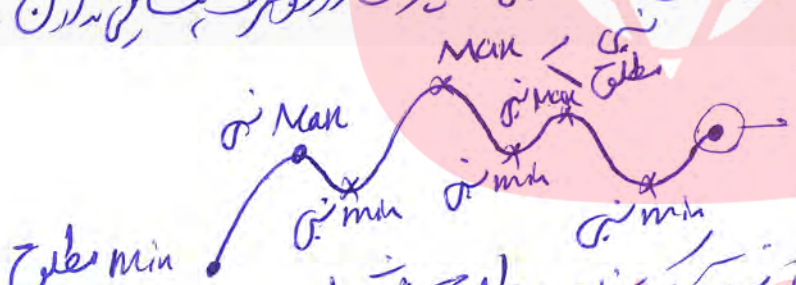
Max or min ← اکسترمم یعنی

هم Max نسبی و مطلق بجز این که فقط نسبی

هم min مطلق و نسبی بجز این که فقط نسبی

* نقاطی که از همه همسایه‌ها بالاتر یا مساوی باشن Max نسبی و نقاطی که از همه همسایه‌ها پایین‌تر یا مساوی باشن min نسبی هستن. اگه یه طرف بالاتر و یه طرف پایین‌تر هیچ ⑨

* ممکنه بازه‌ی بزرگ اکسترمم مطلق باشن ولی نسبی نه؛ چون دو طرف همسایگی ندارن.



این نقطه هیچی نیست چون اولاً همسایگی نداره که بخواد نسبی باشه و ثانیاً از همه بالاتر یا پایین‌تر نیست که بخواد مطلق باشه!

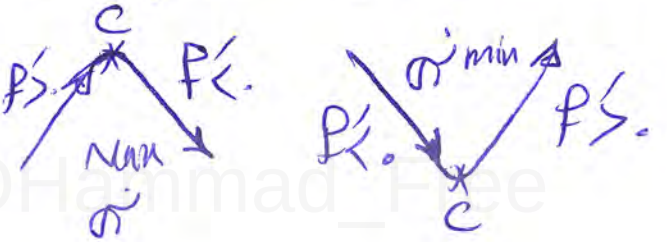
* تشخیص اکسترمم‌ها از روی ضابطه

✓ نقاط بحرانی کاندیدای اکسترمم هستن. نقطه بحرانی نقطه‌ایه که یا مشتق صفره یا مشتق وجود نداره.

✓ اگر تابع مشتق‌پذیر باشه اکسترمم‌هم مشتق‌پذیره نه در این صورت مشتق صفره.

✓ پس برای پیدا کردن نقاط بحرانی از روی ضابطه: اگر تابع مشتق‌پذیر بود مشتق رو مساوی صفر می‌ذاریم

$f'(c)=0$ ← اگر f تغییر علامت داد c طول نقطه اکسترمم



مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: @MOHammad_Free

P.7

* اسم این کار، آزمون مشتق اول. یعنی ریشه ساده f' میشه اکسترمم.

✓ حالا اگر تعیین علامت f' ساده بود از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

حالا اگر f' صفره $\begin{cases} \text{اگر } f''(c)>0 \text{ باشه کمینه نسبی} \Rightarrow c \text{ میشه } \min \\ \text{اگر } f''(c)<0 \text{ باشه بیشینه نسبی} \Rightarrow c \text{ میشه } \max \end{cases}$

✓ جایی که تعیین علامت سخته برای تشخیص نوع اکسترمم از این آزمون استفاده می‌کنیم.

مثال ①: طول و نوع اکسترمم یا اکسترمم‌های تابع مقابل؟ $f(x)=x^4+8x^3-18x^2$

$f'(x)=-4x^3+24x^2-36x=0 \Rightarrow -4x(x^2-6x+9)=0$

$\Rightarrow -4x(x-3)^2=0 \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{ریشه ساده } f' \text{ اکسترمم} \\ x=3 \rightarrow \text{ریشه مضاعف } f' \text{ عطف} \end{cases}$

حالا برای تشخیص نوع اکسترمم یا تعیین f' رو تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	$+$	$/$	0	$\searrow$	

پس براساس آزمون مشتق اول $x=0$ طول نقطه $\max$ نسبی.

مثال ②: طول نقطه اکسترمم نسبی منحنی تابع $f(x)=\sin x-\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$؟

$f'(x)=\cos x+\sin x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$

حالا طول تعیین علامت نمی‌خواد یا بهتره از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$f''(x)=-\sin x+\cos x \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2} \xrightarrow{f''(\frac{3\pi}{4})<0}$ نسبی $\max$

مثال ③: بردهای $f(x)=x^3-12x+8$ در بازه $[-3,1]$

f (سر بازه)، f (ته بازه)، f (نقاط بحرانی درون بازه) $\Rightarrow f(-3)=17$ ، $f(1)$ ، $f(-3)$ طول $\min$ ، طول $\max$

$f'(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow \notin D_f \\ x=-2 \rightarrow f(-2)=24 \end{cases}$

!!! بردهای بیشتر از $\min$ طول $\max$ و $\max$ طول $\min$.

@MOHammad_Free
ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:@MOHammad_Free

P.8 $f'(c)=0$ ← مشتق پذیر

$f'(c)$ not exist ← مشتق ناپذیر

⑨ نه نوع نقطه بحرانی داریم

نقاط بحرانی سر و ته بازه بحرانی نیستند.

مشتق‌پذیر

$f'(c)=0$

مشتق‌ناپذیر

$f'(c)$ not exist!

(۶) ناپیوستگی

(۱) $g(\alpha)<0$ ← $(x-\alpha)^{\text{زوج}}g(x)$ (۱)

(۲) $g(\alpha)>0$

(۳) $g(\alpha)>0$ ← $(x-\alpha)^{\text{فرد}}g(x)$ (۲)

(۴) $g(\alpha)<0$

(۵) تابع ثابت همه‌ی نقاط بحرانی

نقطه مرزی

(۷) زاویه‌دار

۱- نقطه مرزی

۲- قدر مطلق $|x^{\text{۲}}(x-1)|$ $x=1$

۳- براکت $x[x]$

(۸) عطف قائم

$\sqrt[\text{فرد}]{(x-\alpha)}$

$\sqrt[\text{۳}]{x-1}$ $x=1$

$\sqrt[\text{۵}]{x^{\text{۳}}}$ $x=0$

(۹) بازگشتی

$\sqrt[\text{زوج}]{(x-\alpha)^{\text{۲}}}$

$\sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۲}}}$ $x=0$

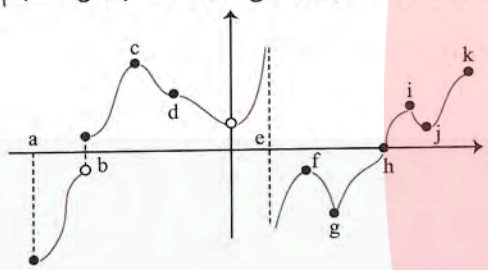
$\sqrt{|x|}$ $x=0$

حالا نقاط بحرانی به چه درد می‌خورن؟! نقاط بحرانی کاندیدای اکسترممی هستن یعنی می‌رن برای کسب مقام اکسترممی. در واقع از بین نقاط بحرانی اکسترم‌ها (Max و min نسبی) انتخاب می‌شن.

مثال ۸ در نمودار زیر، چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۹



نقاط b ، c ، d ، e ، f ، g ، h ، i و j بحرانی هستند.

برای تعیین نقاط بحرانی از روی ضابطه کافیه مشتق بگیریم. اگر مشتق حاصل برابر صفر شد برابر صفر قرار بدیم و اگر مشتق گیری بود هم صورت و هم مخرج رو برابر صفر قرار بدیم. ریشه‌های صورت و مخرج مشتق همه بحرانی‌اند به شرطی که عضو دامنه باشن.

توابع ساده و کاربردی و معمولی همیشه یک نقطه بحرانی دارن.

$D_f=\mathbb{R}$ و صفرهاش رو

* $f(x)=x^{\frac{6}{5}}-12x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f'(x)=\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}-\frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}}=0$

چون اصلاً توانهاشون یک واحده لذا می‌تونیم بگیریم x^{-1} !

$\frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}(1-2x^{-1})=0 \Rightarrow \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)=0 \Rightarrow \sqrt[5]{x}\left(\frac{x-2}{x}\right)=0$

$x=2$ ← نقطه بحرانی مشتق‌ناپذیر و $x=0$ ← نقطه بحرانی مشتق‌ناپذیر

* $f(x)=x^{\frac{7}{6}}-\frac{7}{2}x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{3}}=0$

$\Rightarrow \frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt[6]{x}}{2}=\frac{1}{\sqrt[6]{x}} \Rightarrow \sqrt[6]{x}\sqrt[6]{x^2}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2$ $(x=4)$

ولی $x=0$ سر بازه و بحرانی نیست

⑮ نقطه عطف

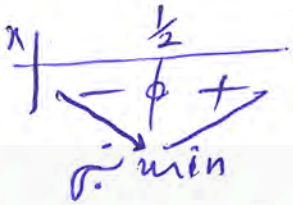
شرایط: 1) پیوستگی
2) وجود مماس و عدم
3) تغییر جهت تقعر

تو توابع مشتق دار برای اینکه بفهمیم مشکل نداره نقطه اعطف رشته ساده‌ی f'' میشه ولی تو توابع رادیکالی ریشه ساده‌ی مخرج f' هم به شرط حضور در دامنه می‌تونه عطف باشه. مثلاً

$$f(x)=x\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\underbrace{\left(2-x^{-1}\right)}_{2-\frac{1}{x}}=0 \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=0 \Rightarrow \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2}}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2}}=0 \Rightarrow x=0$$



$x=\frac{1}{2}$ ریشه ساده‌ی f' پس اکسترمم و با آزمون مشتق اول معلوم میشه که $x=\frac{1}{2}$ مینیمم نسبی و $x=0$ هم ریشه‌ی صورت و f' تو صفر تغییر علامت میده پس $x=0$ هم نقطه عطف.

حالا برسیم سر f'':

$$f''(x)=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}\underbrace{\left(1+x^{-1}\right)}_{1+\frac{1}{x}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\left(\frac{x+1}{x}\right)=0 \Rightarrow$$

همواره مثبت

$x=-1$ ریشه ساده‌ی f'' عطف

$x=0$ ریشه ساده‌ی مخرج f'' و بازهم عطف

چون دامنه f و f'' تو صفر دارن تغییر علامت میدن.

تابع درجه 3

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b=0$$

$$x_I=-\frac{b}{3a}$$

f'' درجه یک شد و صفرش یه عطف داره.

$\Delta f'>0$ / $\Delta f'=0$ / $\Delta f'<0$

$a>0$ $a<0$ / $a>0$ $a<0$ / $a>0$ $a<0$

تابع درجه 4

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

f' درجه 3

f'' درجه 2 $\begin{cases}\Delta>0 \rightarrow \text{دو تا عطف}\\ \Delta=0 \rightarrow \text{فاقد عطف}\\ \Delta<0 \nearrow\end{cases}$

اگه $\Delta_{f''}$ صفر یا منفی بشه f'' فاقد عطف میشه

چون درجه چهارم حالتی نیست فقط $a>0$ ها رو داریم

f' سه ریشه دارد / f' دو تا ریشه دارد / f' یک ریشه دارد

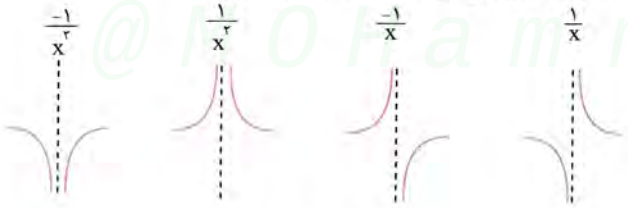
$a>0$ $a>0$ $a>0$ / $a>0$ $a>0$ / $a>0$

مای درس
مرجع آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: @Mohammad_Free

P.10

مجانب شاخه‌ی بی‌نهایت منحنیه و یک کمک رسم بسیار مهم در نمودارهای کسری و رادیکالیه. ۳ نوع مجانب داریم که تو یه تخته کل درسشو برات توضیح می‌دم. البته منحنی یه تابع حداکثر می‌تونه ۲ نوع مجانب رو داشته باشه یعنی افقی – قائم یا افقی – مایل یا قائم – مایل. البته یه منحنی میتونه حداکثر دو مجانب افقی و دو مجانب مایل و بیشمار مجانب قائم داشته باشه یعنی محدودیتی در تعداد مجانب قائم نداریم.

(11) انواع مجانب



قائم $(x=a)$

حد بی‌نهایت $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty)$

تو چه توابعی مجانب قائم داریم؟

فقط تو توابع کسری

* ریشه‌ی مخرج مجانب قائمه ولی نه هر ریشه‌ی مخرجی! دو تا شرط داره!

اولاً صورت رو صفر نکنه یعنی با عامل صفرکننده‌ی صورت ساده نشه!

ثانیاً: زیر رادیکال‌هایی که شاید توی کسر باشه رو منفی نکنه!

افقی $(y=b)$

حد در بینهایت $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b)$

تو چه توابعی مجانب افقی داریم؟

تو توابع کسری و رادیکال‌های Mix!

* تو کسر اگه درجه‌ی مخرج بیشتر باشه، حد در بینهایت صفر می‌شه. پس $y=0$ میشه مجانب افقی. اگه صورت و مخرج هم توان باشن چی؟!

$$\text{مجانب افقی} = \frac{\text{ضریب جمله‌ی پر توان صورت}}{\text{ضریب جمله‌ی پر توان مخرج}}$$

* رادیکال Mix:

$$mx+h\pm\sqrt{ax^2+bx+c}$$

یه افقی یه مایل $\Rightarrow$ if $|m|=\sqrt{a}$

دو تا مایل $\Rightarrow$ if $|m|\neq\sqrt{a}$

مایل $(y=ax+b)$

حد در بینهایت $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty)$

تو چه توابعی مجانب مایل داریم؟

توابع کسری و رادیکالی!

* تو کسر اگه صورت یه درجه بیشتر باشه مجانب مایل داریم، کافیه صورت رو به مخرج تقسیم کنیم.

* تو رادیکال خوش ترکیب عبارت هم‌ارز رادیکال (بنّا)، می‌شه مجانب مایل:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\dots}=\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$$

به $\frac{b}{na}$ می‌گیم بنّا! البته به شرطی که:

$a>0$ باشه.

(12) فقط یه نگاه

استرم با یه نگاه: $\sqrt[3]{(x-\alpha)^2} < |x-\alpha| < (x-\alpha)^2$

عطف با یه نگاه: $(x-\alpha)|x-\alpha| < \sqrt[3]{(x-\alpha)} < (x-\alpha)^3$

استرم

① $(x-\alpha)^{\text{فرد}}\, g(x)$ ($g(x)$ زوج)

$\frac{(x-1)^2(x^2+1)}{(x-1)^2}$ — $\frac{(x-1)^2}{x-3}$

② $\sqrt[\text{فرد}]{(x-\alpha)^{\text{زوج}}}\, g(x)$

$\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$ — $\sqrt[3]{x^2}(x-1)$

③ $|x-\alpha|\, g(x)$

$|x-2|\sin x$ — $|x-2|\cos x$

عطف

① $(x-\alpha)^{\text{فرد}}\, g(x)$

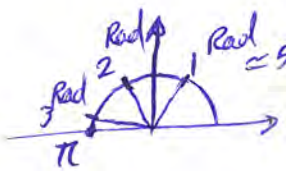
$(x-1)^3(x^2+5)$ — $\frac{(x-1)^3}{2x-3}$

② $\sqrt[\text{فرد}]{(x-\alpha)^{\text{فرد}}}$

$\frac{\sqrt[5]{(x-1)^3}}{2x+1}$ — $\sqrt[3]{x+1}(x-5)$

③ $(x-\alpha)|x-1|$

$x|x|$ — $-(x-1)|x-1|$



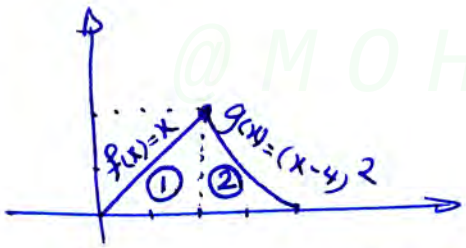
تذکر: وقتی جلوی $\sin 1$ یا $\cos 2$ منظور 1 یا 2 رادیان که جاهاش اینجاس:

@Mohammad_Free
ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram.Me/Mohammad_Free

P.1

خلاصه خاص انتگرال

① سطوح نوع اول و دوم



در شکل مقابل سطوح نوع اول و دوم رو شاهد هستیم ! سطح نوع اول ① سطحیه که برای محاسبش نیاز به هیچ راه حل خیریه نداریم و کافیه مساحت های ساده رو توهندسه بلد باشیم. در واقع سطوح ساده هندسی سطوح نوع اول هستن. مثلا" اینجا مساحت بین منحنی $f(x)$ و محور x ها از صفر تا 2 میشه مساحت یک مثلث یعنی $\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$ یعنی $\frac{2\times 2}{2} = 2$ ؛ ولی آیا سطح زیر منحنی $g(x)$ رو هم میشه با هندسه حساب کرد؟! نه دیگه ! این تو بمیری دیگه از اون تو بمیر یا نیست بچه گی عزیزم. برای محاسبه مساحت بین منحنی $g(x)$ و محور x ها از 2 تا 4 نیاز به ابزاری داریم به اسمش انتگرال ! سطح زیر منحنی $g(x)$ رو به صورت $\int_2^4 g(x)\,dx$ نشون میدیم و من روش بدست آوردنش رو بهتون یاد میدم. پس اولین قدم روش محاسبه انتگرال هایی توانی سادست. انتگرال گیری تقریبا" برعکس مشتق گیریه. تو مشتق ها تو ان رو کم می کردیم و ضرب ! تو انتگرال جمع می کنیم و تقسیم ! هر عدد ثابتی می تونه باشه C

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

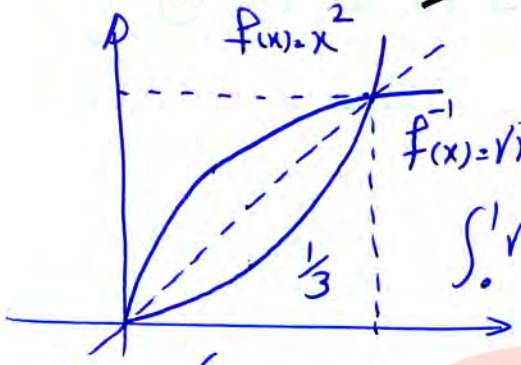
مثلا" وقتی به شما میگن $\int 2x$ چی می خاستن بگن صرف توابع اولیه ای بودن که مشتقشون شده $2x$! شما میگی x^2 به اضافه هر عدد ثابتی ! یا به زبون ریاضی x^2+C !

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C \quad , \quad \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+C \quad , \quad \int \underbrace{x^4}_{\text{مشتق}}\,dx = \frac{x^5}{5}+C \quad , \cdots$$

$$\int \frac{x^2-3x}{x}\,dx = \int \frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} = \int x-3 = \underbrace{\frac{x^2}{2}-3x}_{\text{انتگرال}} + C$$

@MOHammad_Free
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

② روشهای انتگرال گیری و محاسبه انتگرال معین

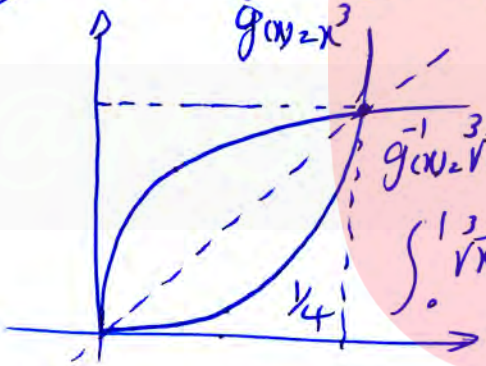


$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

قضیه اساسی حساب انتگرال: $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$ که طبق بالا ثابت کردیم: $F(b)-F(a)$

به این می‌گن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال یا قضیه بنیادی! دوستش قضیه اساسی حساب انتگرال

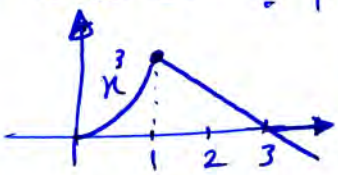


$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\Big]_0^1 = \frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}$$

حالا $\int_0^1 x\,dx$ چی میشه؟! خب این که نیاز به محاسبه نیست! این سطح نوع اول و

جواب میشه $\frac{1}{2}$. حالا سطح بین این دو منحنی و خط‌ها چی‌کاره؟



می‌گیم از صفر تا یک نوع دوم و $\frac{1}{4}$ و از یک تا دو هم نوع اول و مساحت مثلث $\frac{2\times 1}{2}=2$.

پس کل سطح میشه $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$. کل انتگرال‌های نامعین شما این 5 مدل هست:

۱- معمولی	۲- مثلثی	۳- توانی	۴- با لگاریتم	۵- با e و توان
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int u'\cos u = \sin u + C$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$	$\int \frac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int u'e^u = e^u + C$
$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C$	$\int u'\sin u = -\cos u + C$	$\int 2(2x-3)^2 = \frac{(2x-3)^3}{3}+C$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int e^x = e^x + C$
	$\int u'(1+\tan^2 u) = \tan u + C$			
	$\int u'(1+\cot^2 u) = -\cot u + C$			

@MOHammad_Free
ماي درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.3

تذکر مهم: لولا" به سوال بالای 90 از تکوال انتگرال شما به شکل مقابل است

$$\int \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}}dx = x\sqrt{x}\,f(x)+C \rightarrow$$ رو درست بیار $f(x)$

لول تفکیک: $\int 5x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{حالا انتگرال بگیر}} \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$

سعی بگردان به توان $= 2x^2\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+C \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} x\sqrt{x}(2x+2)+C$

ثانیاً اگر توغلی یا شلغی دادن نفس کا فراموش نشه لطفاً. مثلاً وقتی داره $\int x\cos x^2$ حواستون باشه شما حتماً باید به 2 ضرب و تقسیم کنید کا توغل cos شکل بگیره و اگر x نبود انتگرال رو نمی‌تونستید حل کنید.

$$\frac{1}{2}\int 2x\cos x^2 = \frac{1}{2}\sin x^2+C$$

حالا اگه بجای $\cos x^2$: $\cos^2 x$ بود باید چیکار می‌کردیم؟!

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int \cos 2x$$

انتگرال $\frac{1}{2}$ که میشه $\frac{1}{2}x$ ولی $\int \cos 2x$ نیاز به 2 و $\frac{1}{2}$ داره نقص داریم

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\int 2\cos 2x = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

پس اگه انتگرال $\sin^2 x$ رو خواست از رابطه $\frac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده کن ولی اگر $\int \cos x \sin^2 x = \frac{\sin^3 x}{3}+C$: کا توغلش بود راستکی فرق می‌کنه

ثالثاً یه حقایه بگم:

$$*\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \int 2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$*\int \frac{2x}{x^2+1} \xrightarrow{\text{دیگه نمی‌تونیم بالا بیاریم چون توان مخرج کسریه!}} \ln(x^2+1)+C \rightarrow$$ بالاسری بود!

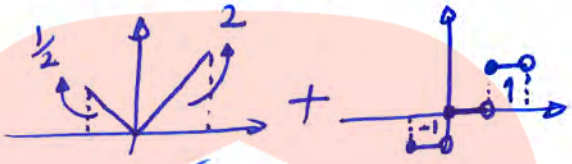
ت بالاسری شاهده که مقایسه تشنگ بود!!!

③ انتگرال‌های قدرمطلقی و براکت

بسیار بسیار مهم و احتمالاً یکی دیگر از سوالای انتگرال کنکور. به سه دسته تقسیم‌شون کردم این انتگرال‌ها رو که باهم مشاهده می‌کنیم!:

□ دسته اول: رسمشون راحته! درواقع قدرو براکت ندارن!

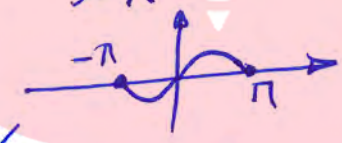
$* \int_{-1}^{2} |x| + [x]$

$= \int_{-1}^{2} |x| + \int_{-1}^{2} [x] =$  $= \frac{5}{2}$

□ دسته دوم: بازه متقارنه و از تابع زوج و فرد استفاده می‌کنیم.

$\int_{-a}^{a} \text{تابع زوج} = 2\int_{0}^{a}$ ، $\int_{-a}^{a} \text{تابع فرد} = 0$ ، $\int_{-a}^{a} [\text{یک تابع فرد}] = -a$

$\int_{-2}^{2} |x| = 2\int_{0}^{2} = 4$ ، $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x = 0$ ، $\int_{-3}^{3} [\sqrt[3]{x}] = -3$



□ دسته سوم: نه قدرو براکت نمه و نه بازه متقارن. اینجاست که باید دقت بخرج بدن!

$\int_{-1}^{2} [x]|x| = \int_{-1}^{0} (-1)(-x) + \int_{0}^{1} (0)(x) + \int_{1}^{2} (1)(x) = \int_{-1}^{0} x + \int_{1}^{2} x = 1$

④ قضیه اساسی اول (مشتق انتگرال)

$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$

$F'(x) = f(x)$ ⟶ مثلاً ⟶ $G(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin 2t}{1+t^2}\,dt \Rightarrow G'(x) = \frac{\sin 2x}{1+x^2}$

$y = \frac{G(x)}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{G'(x)\cdot x^2 - 2x\,G(x)}{x^4}$ ⟶ حالا دیگه مشتق‌گیری

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

خلاصه خاص مقاطع مخروطی

① فرم گسترده همه مقاطع و ورود به دایره و شرط وجود

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

if $A=B$ دایره | if A or $B=0$ سهمی | if $A\neq B, AB>0$ بیضی | if $A\neq B, AB<0$ هذلولی

فرم گسترده دایره ← $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ← هم تقسیم بر A

ولی تعریف دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌شان از یک نقطه ثابت به نام مرکز مقدار ثابتی به نام شعاع باشد دایره است.

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ← معادله استاندارد دایره

مثلاً $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ < مرکز (α,β) شعاع $r=2$ < $C(1,-3)$, $r=2$

طریقه بدست آوردن مرکز و شعاع از فرم گسترده: $C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$

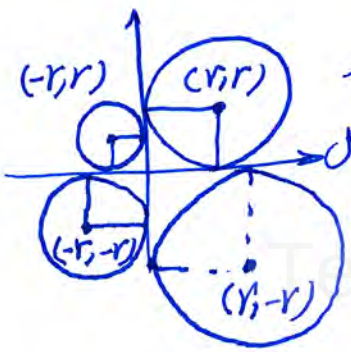
$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

* البته مرکز را با مشتق هم میشه بدست آورد ولی نقطه مرکز

دقت این مبتنی بر شرط وجود دایره است!

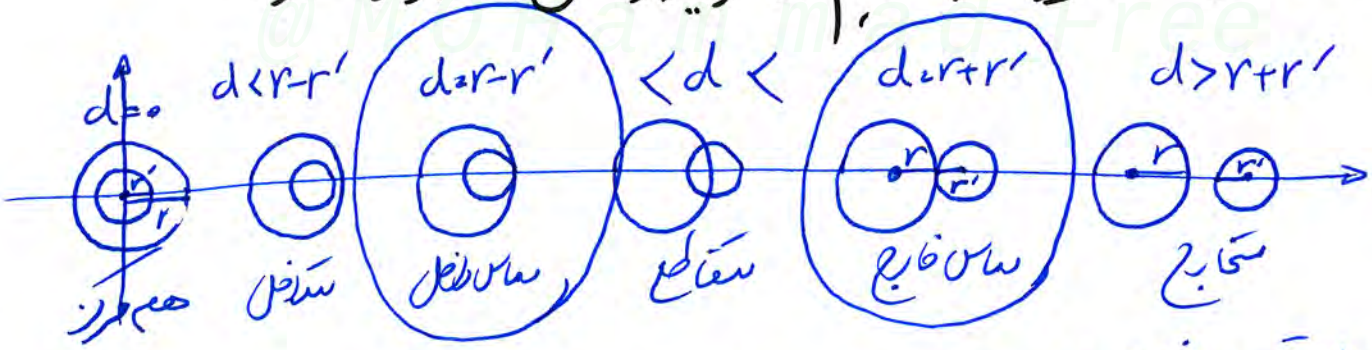
سوالات معادله دایره در کنکور با دانستن:

1. مرکز و شعاع
2. مرکز و یک نقطه روی محیط
3. دو سر قطر (این دو تا سادست)
4. سه نقطه — حالت اری فرم گسترده
5. دو نقطه و خط مماس — خط مماس هم یه نقطه می‌ده دیگه دو تا
6. دو نقطه و معادله‌ای که روش مرکز طول مرکز نقطه فرضی x و فاصله
7. مرکز و خط مماس — فاصله مرکز دایره تا خط مماس همان شعاع
8. دایره مماس بر دو محور — مختصات مرکز به صورت مقابل

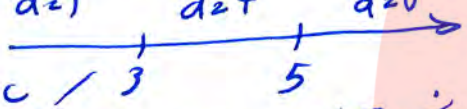


@M.O.Hammad_Free
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

② وضعیت دو دایره نسبت به هم و طریقه نوشتن معادله وتر مشترک



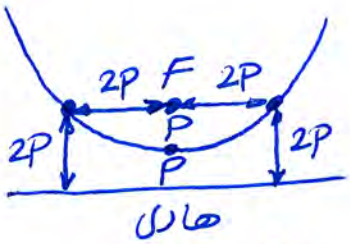
برای تعیین وضعیت کافیست $r-r'$ و $r+r'$ را با d مقایسه کنیم. مثلاً اگر $r=3$ و $r'=2$ باشد $r-r'=1$ و $r+r'=5$ است. حالا اگر فاصله‌ی مرکز دو دایره را d در نظر بگیریم، با توجه به شکل زیر:



اگر مثلاً $d=4$ شد متقاطع، $d=6$ شد متخارج، یا $d=1$ شد متداخل و حتی اگر $d=3$ یا $d=5$ هم شد می‌توان مشخص کرد.

* در حالت متقاطع دو دایره وتر مشترک دارند. برای تعیین معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به این صورت عمل می‌کنیم که معادله‌ی دو دایره را به صورت گسترده نوشته و از هم کم می‌کنیم. درجه‌ی 2 ها با هم می‌روند و اولین درجه یک خطی که باقی می‌ماند معادله‌ی وتر مشترک است. البته وضعیت خط و دایره یا هر دو منحنی نسبت به هم هم مثل وضعیت خط و سهمی در فصل چهارم و آخر است معادله‌ی وتر مشترک دو دایره هم مثل چوب لای سیم‌های محرک سیم‌های درجه دوم هست.

③ سهمی



مکان هندسی نقاطی در صفحه که فاصله‌شان از یک نقطه ثابت برابر با فاصله‌شان از یک خط ثابت باشد را سهمی گویند. نقطه‌ی ثابت را کانون و خط ثابت را هادی می‌نامیم.

* سهمی دو قدم راه است! از هادی تا کانون. و سط راه رأس S.

* سهمی کی داره؟! هادی نداره، رأس داره، کانون داره و محور تقارن داره.

$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$ ⊕ سمت راست، ⊖ سمت چپ

$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$ ⊕ سمت بالا، ⊖ سمت پایین

* معادله استاندارد سهمی افقی

* معادله استاندارد سهمی قائم

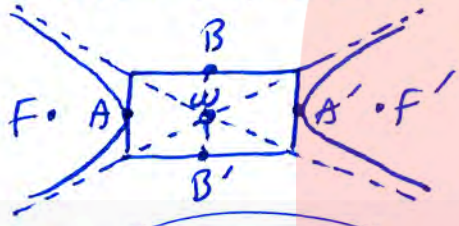
@mohammadfree
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammadFree

* دسته بندی سوالات کنکور:
① با رسم شکل پرسش اجزاء را رسید انجام میدهیم.
② فرم گسترده را به متعادل تبدیل کرده و سپس رسم میکنیم.

④ بیضی و هذلولی: سوالات این مبحث مثل کنکور به دو دسته از تقسیم بندی میشوند.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آن از دو نقطه ثابت $2a$.

$MF+MF'=2a$



$c^2=a^2+b^2$

a تا A میشه
b تا B میشه
c تا F میشه

فاصله‌ها

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ← افقی

$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ ← قائم

هر دو ضلع از مرکز دارن کنکور عمیق!

$e=c/a$

* محل تلاقی مجانب‌ها مرکز هذلولیه

* شیب مجانب‌ها $\pm\frac{b}{a}$ (افقی) و $\pm\frac{a}{b}$ (قائم) * فاصله کانون از مجانب b

هر دو رو کانون دارن کنکور دشمن دشت اصفهان!

$PQ=2b^2/a$

* مکان هندسی به صورت $M\begin{cases}x=1+3\sin t\\ y=2\cos t\end{cases}$ متعلق به بیضیه چون داریم:

$\sin t=\frac{x-1}{3}$
$\cos t=\frac{y}{2}$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \xrightarrow{\text{بیضی}} \begin{matrix}O(1,0)\\ a=3,\ b=2\end{matrix}$

* نقطه M با مختصات پارامتری زیر روی هذلولی حرکت میکنه.

$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$

* مکان هندسی نقاطی که مثلاً عرض نقاط دایره رو نصف $\frac{3}{4}$ تقسیم کرده بیضیه

خلاصه خالص دنباله‌ها و قاعده

اولاً دنباله تابعیه که دامنش اعداد طبیعیه. بنابراین هر دنباله‌ای را می‌توان از $n=1$ شروع کرد یا از هر عدد طبیعی دیگری. با همین روش هر چند سوال اول تکلیف دامنه و حداکثر 95 حل میشه. دو نوع دنباله هم داریم: عددی یا حسابی و هندسی

عددی

جمله عمومی: $a_n = a + (n-1)d$

قدر نسبت: $d = a_n - a_{n-1}$

$7, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 23 \rightarrow 4d = 16$

$\Rightarrow d = 4 \Rightarrow 7, 11, 15, 19, 23$

هندسی

$a_n = aq^{n-1}$

قدر نسبت: $q = a_n / a_{n-1}$

$1, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, 81$

$q^4 = 81 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow 1, 3, 9, 27, 81$

واسطه a, b, c $\rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$

$b^2 = ac \rightarrow b = \pm\sqrt{ac}$

مجموع:

$S_n = \frac{n}{2}(a + L)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

$S_n = \frac{a}{1-q}$: $n \to \infty$, $|q| < 1$

* اگر S_n را داده بود و a_n را خواست:

$S_n = n^2 + 4n$

$S_1 = 5$, $S_2 = 12 \Rightarrow a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow d = 2$ ($a_1 = 5$)

$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_n = 5 + 2(n-1) \Rightarrow \boxed{a_n = 2n + 3}$

* دنباله تقریبات اعشاری:

$11 \; | \; \frac{6}{1.833}$

دنباله $= \{1.8, 1.83, 1.833, \dots\}$ همگرا به $11/6$ و دنباله تفاضلات همگرا به صفر

تبدیل عدد اعشاری به کسر

$0,1\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{99}$

(هشت عدد غیر تکراری، سه عدد غیر تکراری)

به تعداد غیر تکراری‌ها بعد از غیر تکراری به تعداد تکراری‌ها 9 و به تعداد غیر تکراری‌ها 0

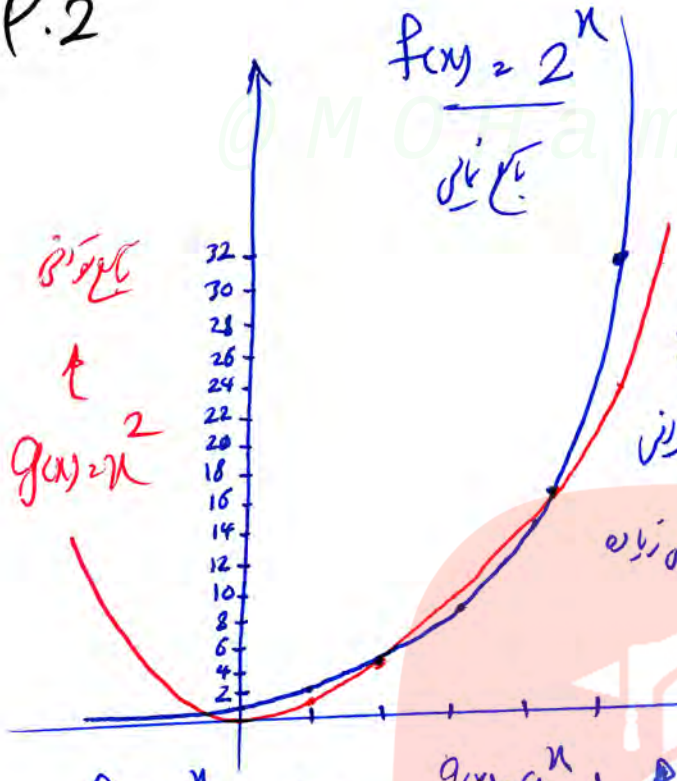
$1,\overline{45} = \frac{145 - 1}{99} = \frac{144}{99} \rightarrow$ (ریاضی 94 خ)

جای خالی
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Mohammad Ebrahimi

P.2

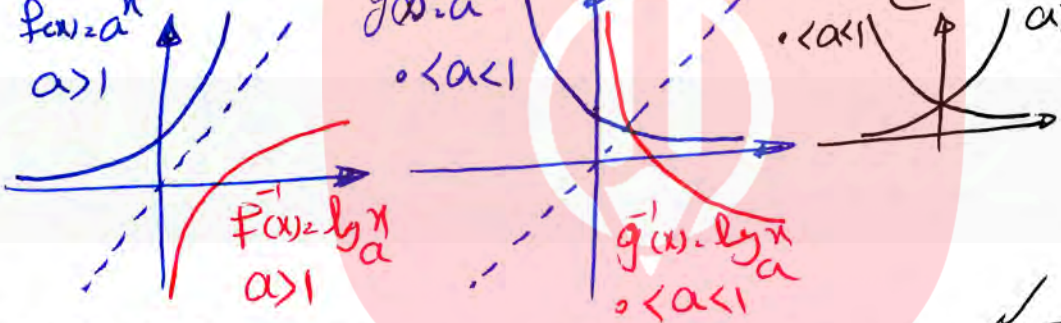
خلاصه خاص توابع نمایی و لگاریتمی

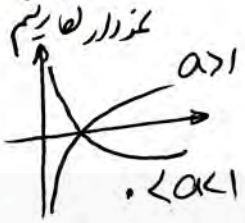
① مقایسه تابع نمایی با توانی



لولاً تو ۲ تا نقطه باهم برخورد دارن و از $x=4$ به بعد تابع نمایی شروع به اوج گرفتن کرده و تابع توانی هرگز پاشو باهم نمی رسه. چون سرعت رشد نمایی خیلی زیاده

معکوسش میکنه میشه تابع لگاریتمی.





$x \to f^{-1} \to f \to x$

$f(f^{-1}(x))=x$

$x \to f \to f^{-1} \to x$

$f^{-1}(f(x))=x$

ترکیب با معکوسش میشه با همانی.

* معکوس لگاریتم؟ میشه نمایی؟

کسرا و رادیکالا را دیگه؟ منفی توانی میشن؟

کندم کندم کندم؟ توان تو درسم!

ویژگی‌های لگاریتم

مهم‌ترین خاصیت در تمام لول

دابل فلش

$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a = 1$

4) $\log a + \log b = \log ab$

5) $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

6) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$

7) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

8) $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$

9) $a^{\log_a x} = x$

© MOTamin-adl-Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram: @Hamid_Free

P.3

* گاهی 2,5 خیلی بهتر و قابل تبدیل تر هم:

$\lg 2 = \lg \frac{10}{5} = \lg 10 - \lg 5 = 1 - \lg 5$

$\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = \lg 10 - \lg 2 = 1 - \lg 2$

* $\ln$ یعنی $\log$ در مبنای عدد نپری e!

$\ln x = \log_e x \Rightarrow \ln e = \log_e e = 1 \;,\; \ln e^n = n \ln e = n$

* معادلات نمایی:

① پایه‌ها برابر: $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

② پایه‌ها برابر نیست: $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$

$2^{2x} - \frac{2}{2^x} = \frac{255}{4} \Rightarrow (2^x)^2 - \frac{2}{2^x} = \frac{255}{4}$

$\Rightarrow t^2 - \frac{2}{t} = \frac{255}{4} \Rightarrow t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

* معادلات لگاریتمی:

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

حواست به دامنه باشه: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$

دامنه $\sqrt{\log x}$ یعنی xهای بزرگتر مساوی یک.

* نامعادلات نمایی و لگاریتمی:

مبنا بزرگتر از یک: جهت علامت حفظ میشه.

مبنا بین صفر و یک: جهت علامت عوض میشه.

* رشد و زوال: $A(t) = A(0)\, e^{kt}$

$A(t)$: مقدار نهایی، $A(0)$: مقدار اولیه، e: عدد نپر، k: ضریب رشد، t: زمان

@MOHammad_Free
www.my-dars.ir

P.4

درسنامه‌ی اول

تعریف ماتریس و انواع ماتریس

اگه یه سری عدد و رقم یا شی رو به صورت سطری و ستونی تو یه کروشه مستطیل شکل قرار بدیم یه ماتریس (Matrix) ساختیم. به اعداد یا اشیاء داخل می‌گیم درایه و ماتریس رو با حروف بزرگ نشون می‌دیم. ماتریسی که m سطر و n ستون داشته باشه بهش می‌گیم $m \times n$ (بخونید m در n)! و به این $m \times n$ می‌گیم مرتبه‌ی ماتریس. برای اینکه دو تا ماتریس با هم مساوی باشن باید اولاً هم مرتبه باشن و ثانیاً درایه‌هاشون نظیر به نظیر با هم مساوی باشه.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} \rightarrow a_{ij} \rightarrow \begin{cases} i = \text{سطر} \\ j = \text{ستون} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثلاً}} a_{13} \rightarrow \text{درایه‌ی سطر اول ستون سوم}$$

اگه تعداد سطر و ستون‌ها با هم برابر باشن یعنی $m=n$ باشه ماتریس مربعی تشکیل می‌شه مثلاً شکل روبرو یه ماتریس مربعیه 3×3:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

اگه ماتریس فقط سطر داشته باشه می‌شه سطری مثل $[1,3]$ و اگه فقط ستون داشته باشه می‌شه ستونی مثل $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. راستی به هر ماتریسی که درایه‌هاش همه صفر باشن می‌گن ماتریس صفر.

مثلاً: $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

درسنامه‌ی دوم

اعمال جبری در ماتریس‌ها

اولاً توی ماتریس‌ها تقسیم نداریم یعنی نمی‌شه دو تا ماتریس رو به هم تقسیم کرد.
جمع و تفریق هم که همون جمع و تفریق معمولیه، فقط باید دو تا ماتریس هم مرتبه باشن اما می‌مونه ضرب ماتریس‌ها که از همه مهمتره. اولین شرط اینه که دو ماتریس ضرب‌پذیر باشن به این صورت که تعداد ستون‌های اولی با سطرهای دومی با هم برابر باشن. پس داریم:

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = AB_{m\times p}$$

تو ماتریس حاصلضرب سطر از اولی و ستون از دومیه!

حالا ضرب ماتریس‌ها رو چه جوری انجام بدیم؟

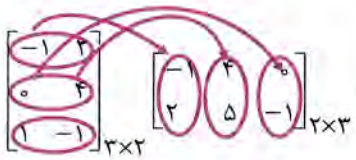
مثلاً می‌خوایم دو تا ماتریس روبرو رو تو هم ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

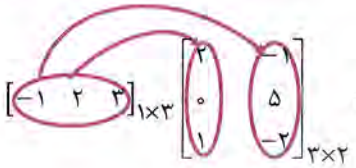
a_{11} درایه‌ی سطر اول و ستون اوله. پس سطر اول اولی رو در ستون اول دومی، درایه به درایه ضرب می‌کنیم و جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم یعنی:

a_{21} درایه‌ی سطر دوم و ستون اوله. پس سطر دوم اولی رو در ستون اول دومی، درایه به درایه ضرب می‌کنیم و جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم. یعنی:

$$a_{11} = (2\times 7) + (5\times 3) = 29$$
$$a_{21} = (1\times 7) + (9\times 3) = 34$$



$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1+4 & -4+10 & 0-2 \\ 0+8 & 0+20 & 0-4 \\ -1-2 & 4-5 & 0+1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 8 & 20 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

حالا که ضرب و ماتریس رو یاد گرفتی لازمه که ویژگی‌های ضرب رو هم بدونی.

@Mohammad_Free
Telegram:Mohammad_Free
www.my-dars.ir

P.5

(۱) **جابجایی**: تو ضرب ماتریس‌ها به طور کلی خاصیت جابجایی وجود نداره یعنی $AB \neq BA$ البته تو یه سری ماتریس خاص این تساوی برقرار می‌شه که بهشون می‌گن ماتریس‌های تعویض‌پذیر و شما تو دبیرستان نمی‌خونین. بخاطر عدم وجودخاصیت جابجایی تو ضرب ماتریس‌ها اتحادها تو ماتریس در حالت کلی برقرار نیست.

$(a+b)^۲ = (a+b)(a+b) = a^۲ + ab + ba + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$:اگه a, b عدد باشن

$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B^۲$:اگه A, B ماتریس باشن

دیگه AB با BA برابر نیست و نمی‌تونیم بگیم $۲AB$. متوجه شدی؟!

(۲) **شرکت‌پذیری**: برقراره:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

(۳) **توزیع‌پذیری**: برقراره:

$$A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C)$$

تذکر ۱ یه عدد رو هم می‌تونیم تو ماتریس ضرب کنیم که بهش می‌گن ضرب اسکالر و به این ترتیبه که اون عدد تو تک تک درایه‌ها ضرب می‌شه. مثلاً:

$$۳ \times \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵ & -۶ \\ ۱۲ & -۳ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱۰ & -۶ \\ -۸ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

راستی اگه یه ماتریس تو عدد ۱- ضرب بشه قرینه می‌شه.

تذکر ۲ مهمترین ماتریس تو بحث ضرب ماتریس واحده که با I نشون می‌دیمش: $I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$.

این ماتریس واحد یا یکه عضو خنثی تو ضرب ماتریس‌هاست و مثل عدد یک تو مجموعه‌ی اعداد حقیقی عمل می‌کنه. پس هر ماتریس در I ضرب بشه می‌شه خودش. ضمناً I با هر ماتریس دیگه‌ای تعویض‌پذیره یعنی: $I \times A = A \times I$

درسنامه‌ی سوم

توان رسانی در ماتریس‌ها

اولاً توان‌رسانی یعنی یه ماتریس اول باید به توان ۲ برسه. $A^۲$ یعنی A رو تو خودش ضرب کنیم: $A^۲ = A \times A$. تو بحث توان‌رسانی من ماتریس‌ها رو به ۴ دسته کلی تقسیم‌بندی کردم.

(۱) **ماتریس پوچ توان**:

از اسمش معلومه که $A^۲ = ۰$. پس A به هر توانی برسه بازم صفر می‌شه، مثلاً $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = ۰, n \notin \mathbb{N}$$

(۲) **ماتریس خود توان**:

اینم از اسمش معلومه که $A^۲ = A$. پس A به هر توانی برسه بازم خودش می‌شه. مثلاً $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$.

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = A, n \in \mathbb{N}$$

(۳) **ماتریس I توان!**:

بازم از اسمش معلومه که $A^۲ = I$ البته خودم این اسمو روش گذاشتم. مثلاً $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \overset{\text{زوج}}{\underset{\text{فرد}}{\Rightarrow}} \begin{cases} A = A^{۲n} = (A^۲)^n = I^n = I \\ A = A^{۲n+۱} = A^{۲n} \times A^۱ = I \times A = A \end{cases}$$

(۴) **ماتریس منظم**:

ای بابا! اینم که از اسمش معلومه. تو توان رسانی یه نظم خاصی به وجود میاد مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P. 6

درسنامه‌ی چهارم

دترمینان و ماتریس وارون (معکوس)

اگر ماتریس A به صورت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشه حاصلضرب قطر اصلی (ad) منهای حاصلضرب قطر فرعی (bc) به عدد می‌شه که بهش می‌گیم دترمینان داریم:

$$|A| = ad - bc$$

مثلاً دترمینان ماتریس A:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (۲\times ۸) - (۳\times ۵) = ۱$$

یا دترمینان ماتریس B:

$$B=\begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = (-۳\times ۴) - (-۷\times ۲) = ۲$$

مهم‌ترین کاربرد دترمینان تو محاسبه‌ی ماتریس وارونه.

ماتریس وارون یا معکوس به صورت مقابل محاسبه می‌شه:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

پس یک به روی دترمینان رو در یک ماتریس جدید (الحاقی) ضرب می‌کنیم. طریقه ساخت ماتریس الحاقی به این ترتیبه که جای درایه‌های روی قطر اصلی رو عوض می‌کنیم و درایه‌های قطر فرعی رو قرینه می‌کنیم. مثلاً می‌خوایم ماتریس C رو معکوس کنیم.

$$C=\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = (۵\times ۷) - (۸\times ۴) = ۳ \Rightarrow C^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۷ & -۸ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

پس محاسبه‌ی دترمینان و ماتریس وارون رو یاد گرفتی. با توجه به تعریف ماتریس وارون شرط وارون‌پذیری یک ماتریس اینه که دترمینان A صفر نشه. $(|A| \neq ۰)$

درسنامه‌ی پنجم

خواص دترمینان و ماتریس وارون

تو کتاب قدیم که تا کنکور ۹۰ وجود داشت از دترمینان و ماتریس معکوس یه عالمه خاصیت نوشته شده بود که تو کتاب جدید تقریباً همش حذف شده. پس وقت شمارو با یه سری خاصیت بی‌خاصیت! تلف نمی‌کنم. فقط ۷ تا خاصیت مهم رو بهتون یاد می‌دم.

(۱) برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس وارون نیازی به معکوس کردن ماتریس نداریم بلکه کافیه دترمینان رو معکوس کنیم یعنی:

$$\left|A^{-۱}\right| = \frac{۱}{|A|}$$

(۲) اگه دترمینان ماتریس A^n رو بخوایم کافیه $|A|$ رو به توان n برسونیم:

$$\left|A^n\right| = |A|^n$$

(۳) برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس $A\times B$ لازم نیست $A\times B$ رو بدست بیاری:

$$|A\times B| = |A|\times|B|$$

(۴) وارون $A\times B$ این شکلی می‌شه:

$$(A\times B)^{-۱} = B^{-۱}\times A^{-۱}$$

(۵) تو جمع و تفریق اجازه‌ی تک‌تک وارون کردن رو نداریم یعنی:

$$(A+B)^{-۱} \neq A^{-۱} + B^{-۱}$$

(۶) وارون وارون A می‌شه خود A.

$$(A^{-۱})^{-۱} = A$$

(۷) اگه ضرب دو تا ماتریس، واحد بشه اون دو تا ماتریس معکوس هم هستن:

$$AA^{-۱} = A^{-۱}A = I$$

توجه کن A و $A^{-۱}$ تعویض‌پذیرن!

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.7

حل معادله‌ی ماتریسی و دستگاه ۲×۲

دستگاه روبرو رو اولین بار تو دوم راهنمایی دیدی و روش حلش رو یاد گرفتی.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حالا برای این دستگاه می‌تونیم یه ماتریس بنویسیم به اسم ماتریس ضرایب: $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$

و حتی می‌تونیم کل دستگاه رو به صورت ماتریسی نشون بدیم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$$

به این می‌گن معادله‌ی ماتریسی

$$A\ X = B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$$

توجه تو اعداد حقیقی هم همین بود دیگه:

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} = \frac{1}{a}b = a^{-1}b$$

تذکر حالا اگه ماتریس X قبل از A بود چیکار کنیم؟!

$$XA = B \xrightarrow{\text{طرفین } \times A^{-1}} XA \times A^{-1} = B \times A^{-1} \Rightarrow X = B \times A^{-1}$$

توجه معادله‌ی ماتریسی زمانی جواب داره که دترمینان مخالف صفر باشه:

$$|A| \neq 0$$

مثال ۱ اگر $\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد و ترمینان ماتریس X کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \Rightarrow a = ۴, b = ۶, c = ۳, d = ۵$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |x| = (۴ \times ۵) - (۶ \times ۳) = ۲$$

مثال ۲ باتوجه به معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} + ۲X = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس X کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) ۵

پاسخ: ماتریس X باید هم مرتبه با دو ماتریس دیگه باشه، بنابراین فرض می‌کنیم $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشه:

در تساوی این دو ماتریس باید درایه‌ها نظیر به نظیر مساوی باشن.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲+۲a & ۳+۲b \\ ۴+۲c & ۵+۲d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲ + ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۱ \\ ۳ + ۲b = -۱ \Rightarrow b = -۲ \\ ۴ + ۲c = ۳ \Rightarrow c = -\frac{۱}{۲} \\ ۵ + ۲d = ۲ \Rightarrow d = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |X| = -\frac{۳}{۲} - (-۲ \times -\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۲} - ۱ = -\frac{۵}{۲}$$

@MOHammad_Free
مای درس
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

مثال ۱ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ باشند، حاصل $A^۲+۲AB$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۴ & ۸\\ ۱۲ & ۱۶\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۸ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۸ & ۸\\ ۱۲ & ۲۰\end{bmatrix}$

پاسخ

(۱) $A^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}=۴I_{۲\times۲}$

بدون ضرب هم می‌تونستم بگم $A^۲$ چی میشه، چون:

$$A=۲\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=۲I\Rightarrow A^۲=(۲I)^۲=۴I^۲=۴I$$

(۲) یا $A=۲I\rightarrow ۲AB=۲(۲I)B=۴I\times B=۴B$

$$۲AB=۲\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۶ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۸\\ ۱۲ & ۱۶\end{bmatrix}$$

و حالا نتیجه‌ی نهایی:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}A^۲+۲AB=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴ & ۸\\ ۱۲ & ۱۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۸\\ ۱۲ & ۲۰\end{bmatrix}$$

مثال ۲ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$ دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۱۳)$

پاسخ طرفین این تساوی‌رو می‌سازیم: پس $\alpha=a+d=-۲+۴=۲$ و $\beta=-|A|=-(-۱۳)=۱۳$

$$\begin{cases}A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}\\ \alpha A+\beta I=\begin{bmatrix}-۲\alpha & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha+\beta & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha+\beta & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\alpha=۲,۹=-۲(۲)+\beta\Rightarrow۹=-۴+\beta\Rightarrow\beta=۱۳\Rightarrow(\alpha,\beta)=(۲,۱۳)$$

دستگاه معادلات

۴ تا دستگاه داریم:

۱) دو معادله دو مجهول
۲) سه معادله دو مجهول
۳) دو معادله سه مجهول
۴) سه معادله سه مجهول

درسنامه‌ی اول

دستگاه ۲×۲

یعنی ۲ معادله ۲ مجهول. ۲ معادله رو که می‌دونم می‌دونی. ۲ مجهول یعنی x و y. یعنی معادله‌ی خط. پس با این دستگاه وضعیت نسبی دو خط رو در صفحه بررسی می‌کنیم. دو خط می‌تونن نسبت به هم ۳ تا حالت داشته باشن که تو یه حالت دستگاه سازگاره و اونم حالتیه که دو خط متقاطع باشن تو بخش آخر فصل قبل یاد گرفتیم دستگاه دو معادله دو مجهول زمانی جواب داره که $|A|\neq۰$ اینجا هم این موضوع رو می‌تونیم ببینیم.

اولاً دو مجهول یعنی معادله‌ی خط $(ax+by=c)$ که مجهولات همون y و x هستن و به a و b و c می‌گن ضرایب معادله.

سه مجهول هم یعنی معادله‌ی صفحه $(ax+by+cz=d)$.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.9

حالا می‌ریم تک تک دستگاه‌ها رو بررسی می‌کنیم:

۱) دستگاه دو معادله دو مجهول (۲×۲)

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

❶ دو خط متقاطع ⟵ دستگاه سازگاره و جواب منحصر بفرد داره؛ $:\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

❷ دو خط موازی ⟵ دستگاه ناسازگاره و جواب نداره! $:\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

❸ دو خط منطبق ⟵ دستگاه بی‌شمار جواب داره و مبهمه! $:\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

حل این دستگاه هم که بر می گرده به دوران راهنمایی که تو سال دوم راهنمایی روش حدّفی رو یاد گرفتید و تو سال سوم راهنمایی روش جانشینی. دیگه اجازه بدید یه سری مسائل اینجا گفته نشه!!! Mer۳۰!

۲) دستگاه سه معادله دو مجهول (۳×۲)

$$\begin{cases} ax_۱+bx_۲=c \\ a'x_۱+b'x_۲=c' \\ a''x_۱+b''x_۲=c'' \end{cases} \xrightarrow{\text{به زبون آدمیزاد}} \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \\ a''x+b''y=c'' \end{cases}$$

با این دستگاه تلاقی سه خط رو در صفحه بررسی می‌کنیم؛ به این ترتیب که اول دو تا خط رو به صورت (۲×۲) با هم قطع می‌دیم یعنی در واقع اول یه دستگاه ۲×۲ رو حل می‌کنیم. حالا اگه نقطه‌ی بدست اومده تو معادله‌ی خط سوم هم صدق کرد یعنی دستگاه سازگار بوده و جواب منحصر بفرد داره. از نظر هندسی اتفاقی که افتاده این شکلیه!

مثلاً مثال دوم صفحه ۱۱۵ کتابتون رو با هم حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۸x_۱-۳x_۲=۷ \\ ۳x_۱-۲x_۲=۰ \\ ۱۰x_۱-۲x_۲=۱۴ \end{cases}$$

بهتره اول سطر دوم و سوم رو با هم حل کنیم. البته سطر دوم رو تو یه منفی ضرب می‌کنیم:

$$\begin{matrix} II\times(-۱)\Rightarrow \\ III \quad \Rightarrow \end{matrix}\begin{cases} -۳x_۱+\cancel{۲x_۲}=۰ \\ ۱۰x_۱-\cancel{۲x_۲}=۱۴ \end{cases} \Rightarrow ۷x_۱=۱۴\Rightarrow x_۱=۲\Rightarrow x_۲=۳$$

حالا نقطه $(۲,۳)$ رو تو خط اولی جایگذاری می‌کنیم. می‌بینیم صدق می‌کنه. $۸(۲)-۳(۳)=۷$. پس دستگاه سازگاره و جوابش هم می‌شه همون نقطه‌ی $(۲,۳)$.

۳) دستگاه دو معادله سه مجهول (۲×۳)

$$\begin{cases} ax_۱+bx_۲+cx_۳=d \\ a'x_۱+b'x_۲+c'x_۳=d' \end{cases}$$

البته اگه دستگاه رو به زبون آدمیزاد بنویسیم اینجوری می‌شه:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

با این دستگاه تلاقی ۲ تا صفحه رو تو فضا بررسی می‌کنیم که ۳ حالت زیر پیش می‌یاد:

دو صفحه همدیگرو در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنن و دستگاه ناسازگاره:

❶ دو صفحه موازی $(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'})$

دو صفحه روی هم قرار دارن و دستگاه بی شمار جواب داره یعنی مبهمه:

❷ دو صفحه منطبق $(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'})$

فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع یک خط می‌شه:

❸ دو صفحه متقاطع (هر حالتی بجز دو حالت بالا)

اینجا هم دستگاه بی‌شمار جواب داره و مبهمه.

مثلاً تو دستگاه $\begin{cases} x_۱+۲x_۲-۳x_۳=-۴ \\ ۲x_۱+x_۲-۳x_۳=۴ \end{cases}$ داریم $\frac{۱}{۲}\neq\frac{۲}{۱}\neq\frac{-۳}{-۳}\neq\frac{-۴}{۴}$ پس دو صفحه متقاطع و دستگاه مبهم.

پس تو حالت کلی در مورد دستگاه $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ می‌تونیم بگیم که وضعیت نسبی تو صفحه رو بررسی می‌کنیم.

فصل مشترک ۲ صفحه تو حالات کلی می‌تونه حالت متفاوتی داشته باشه که این حالات‌ها اینجورین:

موازی
دستگاه جواب نداره

متقاطع
دستگاه بی‌شمار جواب داره

منطبق
دستگاه بی‌شمار جواب داره

پس میشه گفت اگه ۲ صفحه با هم موازی باشن $(\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'})$ دستگاه جواب نداره و در غیر این‌صورت دستگاه بی‌شمار جواب داره.

۴) دستگاه سه معادله سه مجهول (۳×۳)

با این دستگاه وضعیت ۳ تا صفحه رو تو فضا بررسی می‌کنیم که در حالتی که تشکیل یک کنج می‌دن دستگاه سازگار می‌شه و جواب منحصر بفرد پیدا می‌کنه.

Telegram:MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

P. 10

حل این دستگاه اینجوریه که اول یکی از مجهولات رو برحسب دو تای دیگه بدست می‌یاریم (معمولاً این بلا رو سر z می‌یاریم) و بعد توی دو معادله‌ی دیگه جاگذاری می‌کنیم. حالا دستگاه ۲×۲ جدید رو حل می‌کنیم و تو مرحله‌ی آخر با جاگذاری، مجهول حذف شده رو هم بدست می‌یاریم.

۵) دستگاه‌های همگن

به هر دستگاهی که اعداد ثابت همه‌ی معادلاتش صفر باشه، همگن می‌گن.

.مثلا دستگاه همگن سه معادله‌ی سه مجهول رو ببین:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

کاملاً واضحه که یک دستگاه همگن درجه ۳ حداقل دارای یک جواب (۰،۰،۰) و یک دستگاه همگن درجه ۲ یک جواب (۰،۰) داره، که بهش جواب صفر دستگاه می گن. به‌طور کلی در یک دستگاه همگن اگه دترمینان ضرایب مخالف صفرباشه دستگاه فقط جواب صفر داره و سازگاره، و زمانی‌که یک دستگاه همگن جواب غیرصفر داره یعنی دستگاه باید بی‌شمار جواب داشته باشه که بدرد نمی خوره.

مثال ۶ به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y+3x=a, 2y+ax+5=0, y+2x=0$ متقارب‌اند؟

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) نشدنی

اول بجای y های ۲ تا معادله ی اول می ذاریم $-2x$:

$$\begin{cases} 2y+ax+5=0 \\ y+3x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-2x)+ax=-5 \Rightarrow -4x+ax=-5 \\ -2x+3x=a \Rightarrow x=a \end{cases}$$

$$-4x+ax=-5 \xrightarrow{x=a} -4a+a^2=-5 \Rightarrow a^2-4a+5=0$$

آخر حل دستگاه به یه معادله‌ی درجه ۲ رسیدیم که باید صفر بشه اما چون $\Delta=16-20<0$ هرگز این معادله صفر نمی‌شه، یعنی دستگاه ما جواب نداره.

مثال ۷ مهم ترین تمرین کتاب درسی : دستگاه‌های خطی زیر رو حل کنید.

الف) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ -3x_1+2x_2+x_3=4 \end{cases}$ اول z رو بر حسب x, y بدست میاریم و بعد تو دو معادله ی دیگه جاگذاری می کنیم:

$$\begin{matrix} x_1=x \\ x_2=y \\ x_3=z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ x+y+z=6 \\ -3x+2y+z=4 \end{cases} \rightarrow z=6-x-y$$

$$\begin{cases} x+2y+3(6-x-y)=14 \\ -3x+2y+6-x-y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+18-3x-3y=14 \\ -4x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=-4 \\ -4x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow -6x=-6 \rightarrow x=1$$

$$x=1 \Rightarrow y=-2+4(1)=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow z=6-1-2=3$$

ب) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=8 \\ 6x_1+8x_2-2x_3=3 \end{cases}$

اگر به ضرایب نگاه کنی می‌بینی که داریم: $\frac{8}{3} \neq \frac{4}{8}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{6}$، پس این دستگاه جواب نداره و نشون دهنده‌ی دو صفحه‌ی موازیه.

مثال ۸ به ازای کدام مقدار a نیمساز ناحیه‌ی دوم و دو خط به معادلات $y+2x=a$ و $2y+(a-1)x+2=0$ متقارب‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ این دستگاه ۳ معادله دو مجهوله

اول به جای y های ۲ تا معادله شامل a می‌زاریم $-x$ چون گفته نیمساز ناحیه‌ی دوم!

$$\begin{matrix} y+2x=a \\ 2y+(a-1)x+2=0 \end{matrix} \xrightarrow{y=-x} \begin{cases} -x+2x=a \rightarrow x=a \\ -2x+(a-1)x+2=0 \end{cases} \Rightarrow a^2-3a+2=0$$

$$a^2-3a+2=0 \quad \begin{matrix} a=1 \\ a=2 \end{matrix}$$

پس جواب گزینه ۱

مثال ۹ دستگاه معادلات $\frac{2x-y}{2}=\frac{3x+2y}{1}=\frac{5x+y}{3}=\frac{\frac{16}{3}x-\frac{1}{3}y}{4}$ **چند دسته جواب دارد؟**

۱) یک ۲) دو ۳) فاقد جواب ۴) بی‌شمار

پاسخ تو این جور سؤالا به ازای هر علامت = که می‌بینی یه معادله بنویسی! پس ۳ تا معادله بنویس.

$$\begin{cases} 2x-y=6x+4y \\ 9x+6y=5x+y \\ 20x+4y=16x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+5y=0 \\ 4x+5y=0 \\ 4x+5y=0 \end{cases}$$

هر سه معادله یکی شد یعنی سه خط بر هم منطبق هستن و دستگاه بی‌شمار جواب داره

@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی مای درس
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

هندسه مختصاتی

@MOHammad_Free

فصل پنجم کتاب پیش دانشگاهی شامل ۳ بخشه که بخش اولش هندسه‌ی مختصاتیه و کتابتون از صفحه ی ۱۰۸ تا ۱۱۲ در موردش صحبت کرده.
خب همونطور که عزیزانم در جریان هستن واسه‌ی تعیین وضعیت یک نقطه تو صفحه از دستگاه مختصات دکارتی (منسوب به موسیو دکارت) استفاده می‌شه.
توی این دستگاه باید ۶ تا نکته‌ی زیر رو خوب بلد باشی:

۱- نوشتن معادله‌ی خط با استفاده از مختصات دو تا نقطه روی صفحه

شیب خط:

$$\left.\begin{matrix}A(x_1,y_1)\\B(x_2,y_2)\end{matrix}\right\rangle m=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

حالا با m و یکی از نقطه‌ها (مثلاً A) می‌تونی معادله‌ی خط رو بنویسی:

$$\left.\begin{matrix}A(x_1,y_1)\\\text{شیب}=m\end{matrix}\right\rangle y-y_1=m(x-x_1)$$

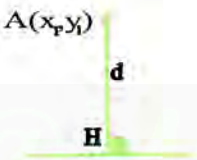
این معادله به دو فرم گسترده و استاندارد مطرح می‌شه.

الف- استاندارد: $y=mx+h$ ؛ ($m=$ شیب)

ب- گسترده: $ax+by+c=0$ ؛ ($-\frac{a}{b}=$ شیب)

۲- فاصله‌ی یک نقطه تا یک خط

فاصله نقطه $A(x_1,y_1)$ از خط $ax+by+c=0$ طول خط عمودیه که از این نقطه به خط وارد می‌شه واضحه که این فاصله کوتاهترین



فاصله نقطه A از خطه، که از رابطه روبرو به‌دست میاد: $d=AH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

من که تو کلاس این فرمول رو هم نمی‌گم بچه‌ها!
می‌گم اول معادله‌ی خط رو استاندارد کن و تو قدرمطلق بذار. به جای x و y هم طول و عرض نقطه رو جاگذاری کن و تو مخرج هم که یه $\sqrt{a^2+b^2}$. مثلاً فاصله‌ی خط $3x-4y=1$ از نقطه‌ی $A(-1,2)$ رو حساب کنیم، اول خط رو استاندارد کن:

$$3x-4y-1=0$$

$$d=\frac{|3(-1)+(-4)(2)+(-1)|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{|-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{12}{\sqrt{25}}=\frac{12}{5}$$

۳- مختصات وسط یک پاره خط

$$M\left|\begin{matrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{matrix}\right.$$

۴- فاصله‌ی دو نقطه توی صفحه

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

۵- فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ:

خُب تو رابطه‌ی بالا اگه مختصات نقطه‌ی B، $(0,0)$ باشه، اینجوری میشه دیگه:

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}$$

۶- فاصله‌ی بین دو خط موازی

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته

$$\begin{matrix}ax+by+c=0\\d\\ax+by+c'=0\end{matrix}$$

۱: اول باید ضریب x و y رو تو دو معادله یکی کنی!
۲: فاصله، فقط برای دو خط موازی تعریف میشه.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

@MOHammad_Free

مطالب لازم برای حل تست‌های کنکور (بدون اندکی مطلب چرت و پرت!)

انواع زاویه:

دو زاویه متمم: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ$

دو زاویه مکمل: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^\circ$

دو زاویه متقابل به رأس: $\hat{M}=\hat{N}\ ,\ \hat{\alpha}=\hat{\beta}$

قضیه‌ی خطوط موازی و مورب:

$$d \parallel d' \Rightarrow \begin{cases} \hat{1}=\hat{2}=\hat{3}=\hat{4} \\ \hat{5}=\hat{6}=\hat{7}=\hat{8} \end{cases}$$

دو قضیه مهم تو مثلث

۱- مجموع زوایای داخلی می‌شه 180°

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

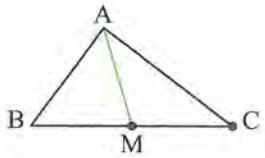
۲- زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور

$$\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$$

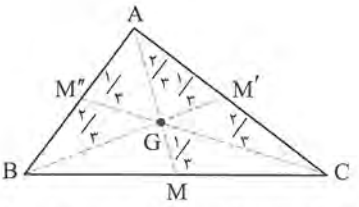
اجزای داخلی مثلث

۱- میانه (AM)

از رأس به وسط ضلع مقابل



$$\Delta ABM = \Delta AMC$$



* ۶ مثلثی که تشکیل شدن هم مساحت

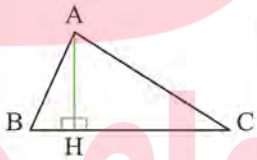
محل تلاقی مرکز ثقل مثلث است.

$$AG=2GM \Rightarrow \begin{cases} AG=\frac{2}{3}AM \\ GM=\frac{1}{3}AM \end{cases}$$

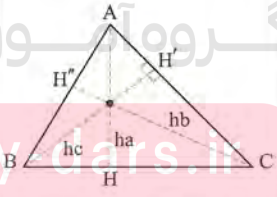
و دو میانه‌ی دیگه هم به همین ترتیب

۲- ارتفاع (AH)

از رأس عمود به ضلع مقابل

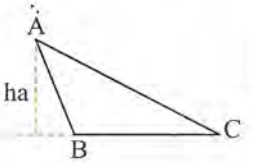


* مثلث سه تا ا رتفاع داره



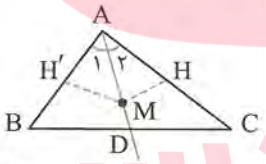
* تو مثلث قائم‌الزاویه دو ضلع قائمه خودشون ارتفاع هستن.

* اگه یه زاویه‌ی بیش‌تر از 90° باشه مثلث ارتفاع‌خارجی داره.



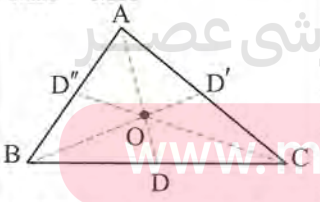
۳- نیمساز (AD)

هر زاویه رو نصف می‌کنه.



* هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

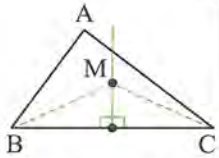
$$MH = MH'$$



* محل تلاقی نیمسازها (O) از سه ضلع مثلث به یک فاصله است البته ما سه تا نیمساز خارجی هم داریم که سه نقطه دیگه مثل (O) بیرون مثلث به وجود میان.

۴- عمود منصف (Δ)

از وسط ضلع عمود به سمت بالا



* هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است یعنی:

$$MB = MC$$

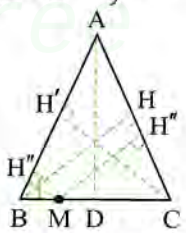
* مثل میانه و ارتفاع و نیمساز قطعاً ما تو هر مثلث سه تا عمود منصف هم داریم.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

P.2

انواع مثلث

۱- متساوی‌الساقین: $AB = AC$, $\hat{B} = \hat{C}$

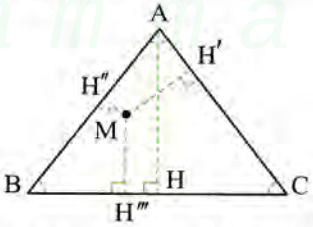


* AD هم ارتفاع، هم میانه، هم نیمساز و هم عمود منصفه!

* مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده از دو ساق برابر، با ارتفاع نظیر هر کدوم از ساق‌ها

$$MH'' + MH''' = BH = CH'$$

۲-متساوی الاضلاع: $AB = AC = BC$, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$



* ارتفاع و میانه و نیمساز نظیر هر کدوم از اضلاع با هم برابرن.

* مجموع فواصل هر نقطه دلخواه داخل مثلث از سه ضلع برابره با ارتفاع یعنی:

$$MH' + MH'' + MH''' = AH$$

۳- قائم الزاویه

* زاویه بین ارتفاع و میانه تفاضل دو زاویه غیر قائمه: $\alpha = |\hat{B} - \hat{C}|$

* ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتره. میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتره. (عکس این قضیه هم صادقه!)

* اگه یه زاویه ۱۵° باشه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتره.

همنهشتی: دو مثلث که کاملاً به هم منطبق باشن همنهشتن به حالت‌های

۱- دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)
۲- دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
۳- سه ضلع (ض ض ض)

انواع خم

مسطح: مجموعه نقاطی از صفحه که بتونیم بدون بلند کردن قلم از کاغذ رسم کنیم.
ساده: خم مسطحی که هیچ یک از نقاط خود را قطع نمی‌کنه مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم برسن.
بسته: اگه ابتدا و انتهای یک خم ساده به هم برسن یک خم ساده‌ی بسته تشکیل می‌شه.

قضیه خم جردن

هر خم ساده‌ی بسته، صفحه رو به سه زیر مجموعه‌ی درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کنه.
تعریف ناحیه: اجتماع یه خم ساده بسته و درون آن یک ناحیه نامیده می‌شه.
ناحیه محدب: هر دو نقطه‌ی دلخواه درون اون رو به هم وصل کنیم، خط حاصل کاملاً درون ناحیه قرار بگیره.

چند ضلعی‌های محدب: چند ضلعی یک خم ساده بسته است که در هر n ضلعی محدب روابط زیر برقراره:

اولاً؛ از اجتماع حداقل ۳ پاره‌خط تشکیل شده باشه.
ثانیاً؛ نقاط انتهایی پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و
ثالثاً؛ هیچ سه نقطه متوالی روی یک خط قرار نگرفته باشه.

۱- مجموع زوایای داخلی: $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$

۲- مجموع زوایای خارجی: ۳۶۰°

۳- تعداد قطرها از هر رأس: $n-۳$

۴- تعداد قطرها: $\frac{n(n-۳)}{۲}$

چهارضلعی‌های خاص:

۱- متوازی الاضلاع

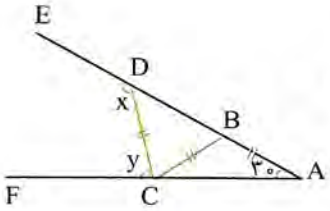
دو ضلع مقابل مساوی و موازی
زاویه‌های مجاور مکمل و قطرها منصف

۲- مستطیل: متوازی‌الاضلاعی که ۴ زاویه برابر داره.
۳- لوزی: متوازی‌الاضلاعی که ۴ ضلع برابر داره.
۴- مربع: متوازی‌الاضلاعی که همه چیش برابره.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

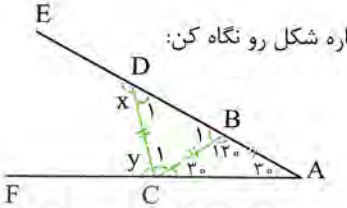
مثال‌های فصل اول

مثال با توجه به شکل روبه‌رو مقادیر y, x را بیابید.



$$AB = BC \rightarrow A\hat{C}B = C\hat{A}B = ۳۰^\circ \rightarrow A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

حالا دوباره شکل رو نگاه کن:



$\hat{B}_۱ + ۱۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ$ (زاویه‌ی نیم صفحه)

$\rightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ$ (۶۰° که بازم می‌شه ABC زاویه‌ی خارجیه برای $\hat{B}_۱$ (تازه می‌تونستیم بگیم.

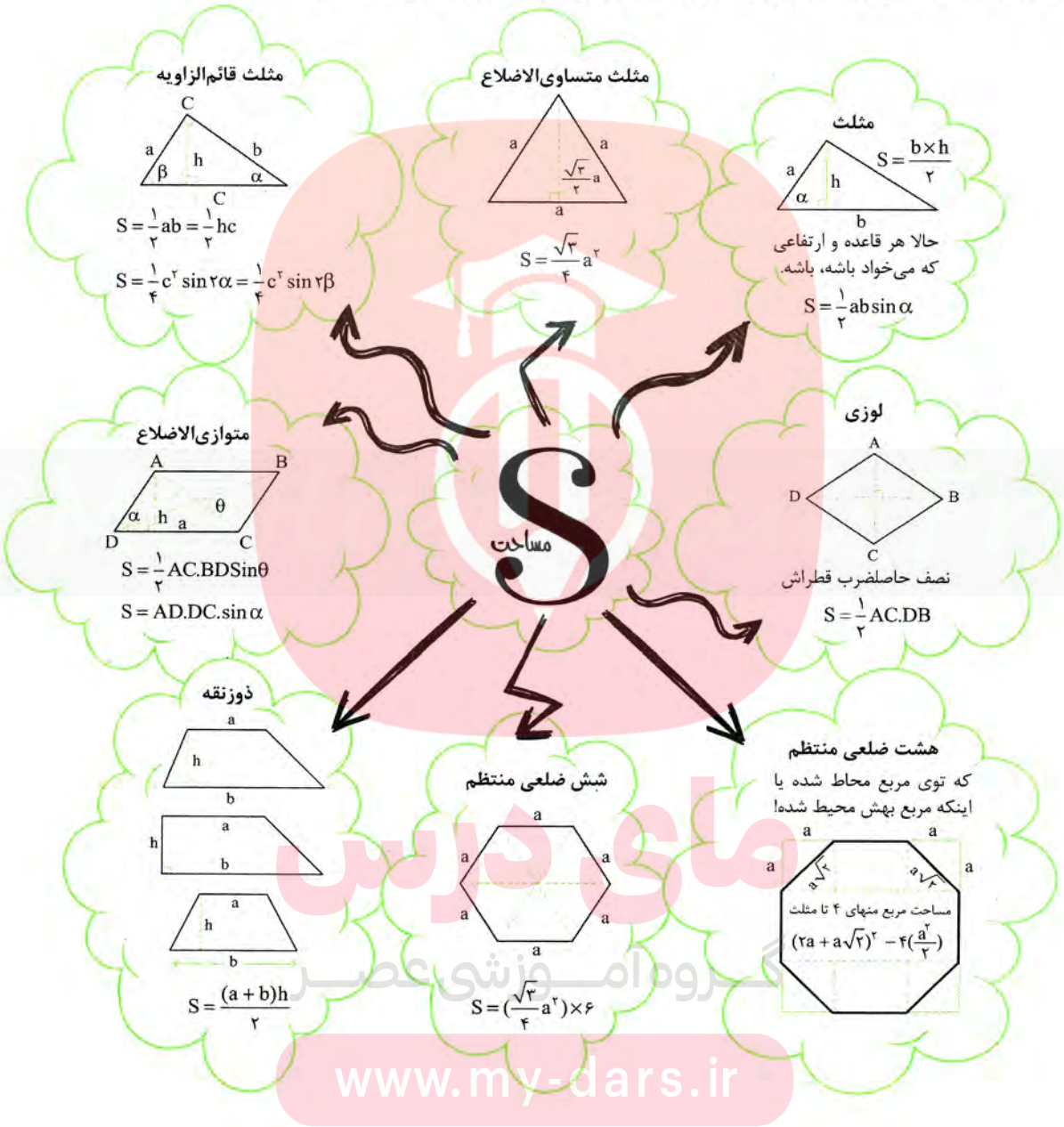
$DC = BC \rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ = ۶۰^\circ \rightarrow \hat{D}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$

Telegram:MOHammad_Free

$c^2 = a^2 + b^2$

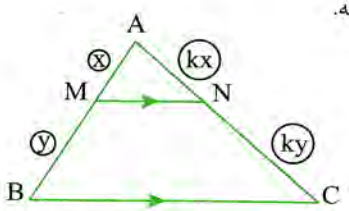
قضیه فیثاغورث رو که از راهنمایی بلدین، یادتونه؟!

تو مساحت هم که مساحت مربع و مستطیل رو راستش روم نشد براتون بنویسم! می‌ریم سراغ بقیه شکل‌ها.



@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free

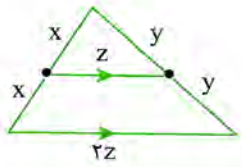
قضیه تالس: هر وقت تو یه مثلثی یه خط موازی قاعده رسم بشه دو ضلع دیگه رو به یه نسبت تقسیم می‌کنه.



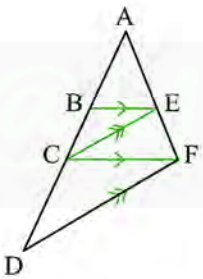
جزءبه‌جزء: $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

جزء به کل: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

این قضیه تالس دو شرطیه، یعنی عکسش هم برقراره به این ترتیب که اگه روی اضلاع یک مثلث نقاط M و N طوری انتخاب شده باشن که پاره‌خط‌های متناسب روی AB و AC به وجود اومده باشه MN موازی BC می‌شه. حالا تو یه حالت خاص خیلی مهم اگه یه پاره‌خط وسط‌های دو ضلع مثلث رو به هم وصل کنه موازی سومین ضلع و برابر نصفشه و عکس این قضیه هم برقراره.



قشنگترین سوالات کنکور تو این قضیه مثلث‌های تو در تو هستن مثل این شکل: (تالس جفت)



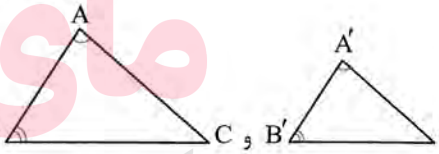
① $\frac{AE}{EF}=\frac{AB}{BC}$ ② $\frac{AE}{EF}=\frac{AC}{CD}$

①,② $\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD}}$

تشابه:

دو شکل هندسی متشابه‌اند به شرطی که
۱- زاویه‌هاشون برابر باشه.
۲- اضلاعشون نظیربه‌نظیر متناسب باشن.

مثلاً دو مثلث ABC و A′B′C′ متشابه‌اند پس:

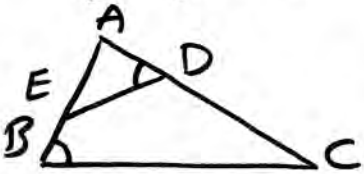


$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$

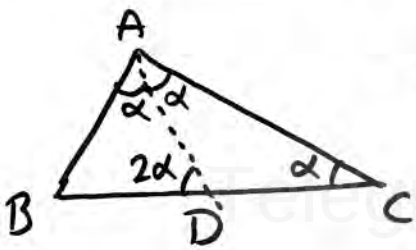
به K می‌گیم نسبت تشابه؛ نسبت محیط‌ها و ارتفاع‌ها و تمام اجزای داخلی هم K میشه ولی نسبت مساحت‌ها K^2.

حالت‌های تشابه دو مثلث در حالت کلی
۱- دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از اون یکی! (ز ز)
۲- سه ضلع با هم متناسب باشن. (ض ض ض)
۳- دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر. (ض ز ض)

دو تا از معروف‌ترین‌ها



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$



$\triangle ABC \sim \triangle DBA$

$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BA}=\frac{AC}{DA}$

تشابه مثلث‌های خاص:

۱ هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند.

۲ هر دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین متشابه‌اند.

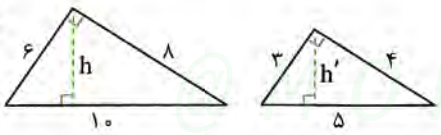
۳ هر مثلث قائم‌الزاویه سه حالت متشابه خاص دارن.
- برابری یک زاویه حاده
- تناسب دو ضلع قائمه
- تناسب وتر و یک ضلع قائمه

۴ دو مثلث متساوی‌الساقین سه حالت تشابه خاص دارن:
- برابری زاویه رأس
- برابری یک زاویه ساق
- تناسب ساق‌ها و قاعده

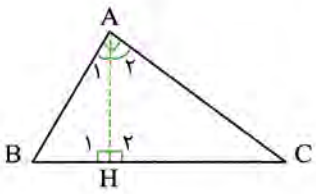
@MOHammad_Free
مای درس
www.my-dars.ir
Telegram: @Mohammad_Free

توضیح نسبت تشابه با یه مثال ساده:

P.5



$$K=\frac{۱۰}{۵}=\frac{۸}{۴}=\frac{۶}{۳}=\frac{h}{h'}=۲$$
$$\frac{S}{S'}=K^{۲}=(۲)^{۲}=۴$$



سه کلّه‌پوک! و روابط طولی تو مثلث قائم‌الزاویه
اول می‌ریم سراغ تشابه مثلث ABC با کوچیکا!

$$ABC\sim H_۱BA_۱\Rightarrow\frac{AB}{HB}=\frac{BC}{BA}\Rightarrow(AB)^{۲}=BH\times BC$$
$$ABC\sim H_۲A_۲C\Rightarrow\frac{AC}{HC}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow(AC)^{۲}=CH\times CB$$

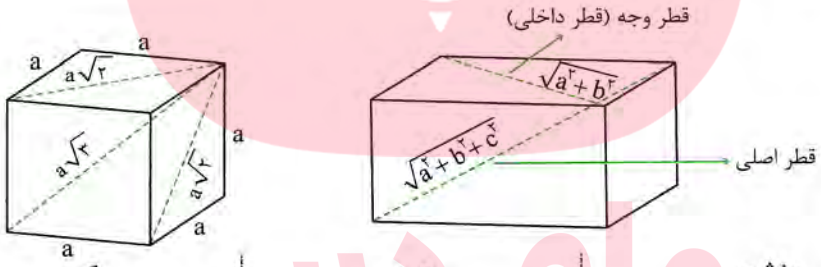
حالا از این دو تا تشابه فهمیدیم که $\hat{A}_۱=\hat{C}$ و $\hat{A}_۲=\hat{B}$ پس دو تا کوچیکا هم متشابه‌اند.

$$A_۱H_۱B\sim CH_۲A_۲\Rightarrow\frac{AH}{CH}=\frac{HB}{AH}\Rightarrow(AH)^{۲}=BH\times HC$$

درسنامه‌ی چهارم

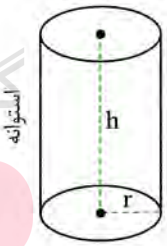
شکل‌های فضایی

وضعیت خط و صفحه تو فضا: تو مبحث دستگاه معادلات مفصل بررسی شد.
قطر وجه و قطر اصلی توی مکعب و مکعب‌مستطیل



منشور

کف و سقف هم‌نهشت



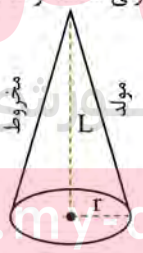
ارتفاع × مساحت قاعده = V

ارتفاع × محیط قاعده = $S_{\text{جانبی}}$

کف و سقف + مساحت جانبی = $S_{\text{کل}}$

هرم

کف داره ولی سقف نوک تیزه!



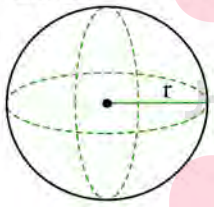
$V=\frac{۱}{۳}\times$ ارتفاع × مساحت قاعده

$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}\times$ مولد × محیط قاعده

$S_{\text{کل}}$ = کف + مساحت جانبی

کره

کره هم که خودت می‌دونی دیگه!



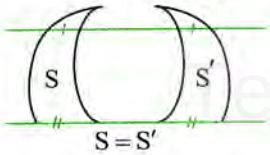
$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

مشتق بگیر نسبت به r

$S=۴\pi r^{۲}$

اصل کاوالیری:

اگه قاعده‌های تو شکل روی یه خط راست باشن و با هم مساوی و خط موازی قاعده در دو شکل پاره‌خط‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کنه.



@MOHammad_Free
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
Telegram:MOHammad_Free